**ESAME 16 GIUGNO 2022**

1. Si enunci il Teorema di Myhill-Nerode e si dimostri formalmente la parte (2) $\rightarrow$ (3). Si definiscano le principali relazioni necessarie (ad esempio $R_L$)

2. Si dimostri (partendo dalle funzioni di base e usando opportunamente le regole di composizione e ricorsione primitiva) che la funzione $f(x) = 2^x \cdot x!$ è primitiva ricorsiva.

3. Si dia la definizione di insieme produttivo e si mostri che se $A$ è produttivo, allora non è ricorsivamente enumerabile.

4. Si dica (motivando la risposta) se $\{x \in \mathbb{N} : (\forall y < x)(\varphi_x(y) \downarrow)\}$ è estensionale

5. Si dia con precisione la definizione di riduzione tra problemi impiegata nello studio delle classi di complessità computazionale

6. Si dica (motivando formalmente la propria affermazione) se i seguenti linguaggi $A_i$ (fissato un certo $i \in \mathbb{N}$) e $A$ siano (o meno) regolari o liberi dal contesto.

$$A_i = \left\{ v \in \{0,1,2\}^* : \ |v| \leq i \wedge \sharp(0,v) + \sharp(1,v) = \sharp(2,v) \ \right\}$$

   Mentre $A = \bigcup_{i \geq 0} A_i$ (ove $\sharp(c,v)$ indica il numero di occorrenze del carattere $c$ nella stringa $v$).

7. Si studino gli insiemi (e i loro complementari):

$$\begin{array}{rcl} B & = & \{x : (\forall y \leq x)(\varphi_x(y) = 9y)\} \\ C & = & \{\langle x, y\rangle : W_x \subseteq E_y\} \end{array}$$

**ESAME 14 LUGLIO 2022**

1. Si definisca la nozione di grammatica di tipo 1, si dia la corrispondente definizione di linguaggio generato $L(G)$ e si mostri che il test $x \in L(G)$ è decidibile.

2. Si enunci e dimostri il Teorema relativo all' "Halting Problem" (e il lemma necessario per la sua dimostrazione).

3. Si definisca la classe $P$ e si dica formalmente cosa significhi essere $P$ completo. Si fornisca un esempio di problema $P$ completo.

4. Si dice se la seguente funzione è ricorsiva e/o primitiva ricorsiva

$$\begin{cases} f(x,0) & = & 0 \\ f(0,y) & = & 0 \\ f(x+1,y+1) & = & y + f(x,y) \end{cases}$$

   Quanto vale $f(100,10)$?

5. Si dica (motivando formalmente la propria affermazione) se, una volta fissato un numero intero $i$, il seguente insieme $A_i$ sia (o meno) regolare o libero dal contesto.

$$A_i = \left\{ v \in \{0\}^* : \ v \text{ è la codifica unaria di un numero primo minore di } i \ \right\}$$

   Nel caso $A_i$ fosse regolare si fornisca l'automa minimo per $A_7$.

   Si studi dunque l'insieme $A = \bigcup_{i \geq 0} A_i$.

6. Si studino gli insiemi (e i loro complementari):

$$\begin{array}{rcl} B & = & \{x : (\forall y \leq 3)(\varphi_x(2y+1) = y^2)\} \\ C & = & \{x : W_x \cap E_x \text{ è ricorsivo}\} \\ D & = & \{x : (\forall y > x)(\varphi_y(x) \downarrow \wedge \varphi_y(x) > 2y)\} \end{array}$$

**ESAME 13 SETTEMBRE 2022**

1. Si elenchino le proprietà di chiusura dei linguaggi liberi dal contesto e si dimostri che non sono chiusi per intersezione.

2. Si dia la definizione di insieme produttivo e si mostri che se $A$ è produttivo, allora (1) non è r.e. e (2) $\bar{A}$ è infinito

3. Si definiscano con precisione le classi $NTIME(f(n))$, $NP$ e $NEXPTIME$. Si mostri dunque che $NP \subseteq EXPTIME$

4. Si dica, motivando la risposta, se il seguente insieme è o meno estensionale:

$$A = \{x : \varphi_x(2x) \uparrow \vee (\exists y > x)(\varphi_y(x) = x)\}$$

5. Si collochi il seguente linguaggio nella gearchia di Chomsky (in particolare, se non fosse regolare o CF lo si dimostri formalmente, se fosse regolare si fornisca l'automa minimo, se fosse CF una grammatica che lo genera):

$$B = \left\{0^{2m}1^n0^{3m} : m, n \in \mathbb{N}\right\} \circ \{1^n : n \in \mathbb{N}\}$$

6. Si studino gli insiemi (e i loro complementari):

$$\begin{array}{rcl} C & = & \{x : (\exists y > x)(\varphi_x(y^2) = 2(y!))\} \\ D & = & \{x : |W_x| \text{ è un numero primo}\} \end{array}$$

Traccia della soluzione:
4) La seconda condizione (in or) è sempre verificata (pensate alla tecnica del padding). Dunque $A = \mathbb{N}$, estensionale.
5) $B$ non è regolare. Per applicare il PL, dato $n \in \mathbb{N}$ usate ad esempio $z = 0^{2n}1^n0^{3n}$. $B$ è CF (trovate la grammatica).
6) $C$ è r.e. completo. Per r.e. pensate a una computazione con dove-tail che cerca $y$, per la completezza nella riduzione usate $2(\sqrt{b}!)$. $D$ è produttivo cosí come il suo complementare. Per le riduzioni usate ad esempio $b \leq 1 \wedge a \in K$ e $b \leq 1 \vee a \in K$.

**ESAME SPECIALE 16/11/2022 (Tempo: 2 ore)**

1. Si dia la definizione di grammatica e in particolare la definizione per le grammatiche CF, di tipo 1 e di tipo 0. Si illustri il diagramma di Venn dei linguaggi generati con le tre tipologie di grammatiche.

2. Si dia la definizione di insieme produttivo e si mostri che se un insieme $A$ è produttivo, allora (1) $A$ non è r.e. e (2) $\bar{A}$ è infinito

3. Si collochi il seguente linguaggio nella gerarchia di Chomsky (in particolare, se non fosse regolare o CF lo si dimostri formalmente, se fosse regolare si fornisca un automa che lo accetta, se fosse CF si fornisca una grammatica che lo genera):

$$B = \{v \in \{0,1,2\}^* : v \text{ inizia con 2 e contiene lo stesso numero di 0 e 1}\}$$

   (ad esempio elementi di $B$ sono: $2, 222010101, 200221120122210, \ldots$)

4. Si studino gli insiemi (e i loro complementari):

$$\begin{array}{rcl} C & = & \{x : \varphi_x(0) = 100 \wedge \varphi_x(1) = 10 \wedge \varphi_x(2) = 1\} \\ D & = & \{x : |W_x| \leq 10\} \end{array}$$

**ESAME 17 GENNAIO 2023**

1. Si enunci e dimostri il teorema relativo alla equivalenza tra i linguaggi accettati dai formalismi DFA e NFA
2. Si dia la definizione di insieme produttivo e si mostri che se $A$ è produttivo, allora $\bar{A}$ è infinito.
3. Si dica (motivando la risposta) se $\{x \in \mathbb{N} : (\forall y < x)(\varphi_x(y) \downarrow)\}$ è estensionale
4. Si dimostri che $NP \subseteq PSPACE$
5. Si dica (motivando formalmente la propria affermazione) se i seguenti linguaggi $A_i$ (fissato un certo $i \in \mathbb{N}$) e infine l'insieme $A$ siano (o meno) regolari o liberi dal contesto.

   $$A_i = \left\{0^a 1^b 2^c : a \leq i, b \leq i, c = a + b\right\}$$

   Mentre $A = \bigcup_{i \geq 0} A_i$
6. Si studino gli insiemi (e, implicitamente o esplicitamente, i loro complementari):

   $$\begin{array}{rcl} B & = & \{x : (\forall y \leq 1000)(\varphi_x(y^2) = y + 1)\} \\ C & = & \{x : E_x = K\} \end{array}$$

**ESAME 16 FEBBRAIO 2023**

1. Si enunci e dimostri il pumping lemma per i linguaggi regolari
2. Si mostri che
$$A = \left\{1^a 0^b 1^b : a > 0, b \geq 0\right\}$$
non è regolare
3. Si dica con precisione cosa significa essere r.e. completo e si mostri che $K$ lo è
4. Si completi l'enunciato e lo si dimostri: $SPACE(f(n)) \subseteq TIME(\qquad)$
5. Si dimostri che il seguente linguaggio è regolare
$$B = \left\{1^a 0^b 1^c : a > 0, b \geq 0, c \geq 0, a \bmod 3 = b \bmod 2\right\}$$
6. Si studino gli insiemi (e, implicitamente o esplicitamente, i loro complementari):
$$\begin{array}{rcl} C & = & \{x : (\forall y > 1000)(\varphi_x(y) \uparrow)\} \\ D & = & \{x : (\forall y > 1000)(\varphi_y(x) \uparrow)\} \\ E & = & \{x : K \subseteq W_x\} \end{array}$$

**ESAME 17 MAGGIO 2023**

1. Si enunci e si dimostri il principale risultato di equivalenza tra automi a stati finiti deterministici e non-deterministici
2. Si elenchino le proprietà di chiusura dei linguaggi liberi dal contesto e si dimostri che non sono chiusi per intersezione.
3. Si dica con precisione cosa significa essere produttivo e si dimostri (in una riga, usando la definizione appena data) che un insieme produttivo non può essere ricorsivamente enumerabile
4. Si dimostri che il seguente linguaggio non è regolare

$$A = \left\{1^a 0^b 1^c 0^d 1^e : a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e > 0, b = 2 \cdot d\right\}$$

5. Si studino gli insiemi (e, implicitamente o esplicitamente, i loro complementari):

$$\begin{array}{rcl} B & = & \{x : \varphi_x(0) = 1 \wedge \varphi_x(1) = 10 \wedge \varphi_x(2) = 100\} \\ C & = & \{x : W_x = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}\} \end{array}$$

   Per chiarezza, l'insieme nella definizione di $C$ è l'insieme dei numeri primi.

6. Si definiscano le classi di complessità $P$ ed $NP$ e si dimostri che $P \subseteq NP$.

**ESAME 15 GIUGNO 2023**

1. Si enunci e si dimostri il principale risultato di equivalenza tra automi a stati finiti deterministici e non-deterministici

2. Si dimostri che la seguente funzione è primitiva ricorsiva:

$$\begin{cases} f(0,y) &= 1 \\ f(x,0) &= 1 \\ f(x+1,y+1) &= 2 \cdot f(x,y) \end{cases}$$

3. Si dica con precisione cosa significa essere produttivo e si dimostri (in una riga, usando la definizione appena fornita) che un insieme produttivo non può essere ricorsivamente enumerabile

4. Che cosa contiene la classe $TIME(f(n))$? Che rapporti ci sono tra $TIME(f(n))$ e $TIME(2 \cdot f(n))$?

5. Si dimostri che il seguente insieme $A$ non è regolare ma è libero dal contesto:

$$A = \left\{1^a 0^b 2^c 0^d 1^e : a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e > 0, a+b = d+e\right\}$$

6. Si studino gli insiemi (e, implicitamente o esplicitamente, i loro complementari):

$$\begin{aligned} B &= \{x : \varphi_x(x) = x\} \\ C &= \{x : (\forall y \in \mathbb{N})(\varphi_x(y) = 1 \text{ se } y \text{ è un numero primo}, \varphi_x(y) = 0 \text{ altrimenti})\} \end{aligned}$$

**ESAME 18 LUGLIO 2023**

1. Si dimostri che i linguaggi regolari sono chiusi per unione.
2. Si dia la definizione di grammatica di tipo 1 e di linguaggi di tipo 1 e si mostri che per tali grammatiche il test $x \in L(G)$ è decidibile.
3. Si *dimostri* che $\bar{K}$ non è ricorsivamente enumerabile.
4. Dato $k \in \mathbb{N}$, fissato, che cosa contiene la classe $NTIME(n^k)$? Che rapporti ci sono tra $NTIME(n^k)$ e $PSPACE$?
5. Si mostri che $A$ è regolare e $B$ non è libero dal contesto.

$$\begin{array}{rcl} A & = & \left\{1^a 0^b 2^c : a, b, c, \in \mathbb{N}, c \equiv_3 a \cdot b\right\} \\ B & = & \left\{1^a 0^b 2^c : a, b, c, \in \mathbb{N}, c = a \cdot b\right\} \end{array}$$

6. Si studino gli insiemi (e, implicitamente o esplicitamente, i loro complementari):

$$\begin{array}{rcl} C & = & \left\{x : \varphi_{\lceil \frac{x}{2} \rceil}(2x+4) = x^2\right\} \\ D & = & \{\langle x, y\rangle : \varphi_x(0) \uparrow \wedge (\forall z > y)(\varphi_x(z) = p_z))\} \\ E & = & \{x : (\exists y > x)(E_y = K)\} \end{array}$$

Dove per $p_z$ si intente lo $z$-esimo numero primo $(p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots)$

**ESAME 12 SETTEMBRE 2023**

1. Si definiscano le relazioni $R_M$ e $R_L$ e si mostri che: se $L$ è regolare e $M$ è un DFA tale che $L(M) = L$, allora $R_M$ è un raffinamento di $R_L$.

2. Sia $G$ una grammatica CF tale che $\varepsilon \notin L(G)$. Si mostri come sia possibile ottenere una grammatica $G'$ priva di $\varepsilon$-produzioni tale che $L(G) = L(G')$.

3. Si dia la definizione dell'insieme $K$. Considerando la enumerazione usata nel corso, si mostrino due indici $a$ e $b$ tali che $a \in K$ e $b \notin K$

4. Si definiscano le classi $P$ e $NP$. Si provi dunque che $P \subseteq NP$.

5. Si collochi il seguente insieme nella gerarchia di Chomsky

$$A = \left\{1^a 0^b 2^c 3^d : a, b, c, d \in \mathbb{N}, (a = b \wedge c = d) \vee (a = d \wedge b = c)\right\}$$

6. Si studino gli insiemi (e, implicitamente o esplicitamente, i loro complementari):

$$\begin{array}{rcl} B & = & \left\{x : \varphi_x(x^2 + 2x) = x\right\} \\ C & = & \{x : (\forall z < 10)(\varphi_x(z) \uparrow) \wedge \varphi_x(10) = 3\} \end{array}$$

**ESAME 22 GENNAIO 2024**

1. Si enuncino e dimostrino le proprietà di chiusura dei linguaggi regolari.
2. Sia $G$ una grammatica di tipo 1 e $x$ una stringa sullo stesso alfabeto. Si mostri che il test $x \in L(G)$ è decidibile.
3. Si definisca la nozione "insieme produttivo". Si mostri dunque che se $A$ è produttivo allora (1) non è r.e., (2) ammette un sottoinsieme r.e. infinito, e (3) ammette un sottoinsieme ricorsivo.
4. Si definiscano le classi $PSPACE$ e $NP$. Si provi dunque che $NP \subseteq PSPACE$.
5. Si collochi opportunamente il seguente insieme nella gerarchia di Chomsky (in particolare, se è regolare, lo si dimostri, se non lo è lo si dimostri, se è CF lo si dimostri, se non è CF lo si dimostri, ...)

   $$A = \left\{1^a 0^b 2^c : \text{se } b \text{ è pari allora } a = c; \text{ se } b \text{ è dispari, allora } a \text{ è pari e } c = 4\right\}$$

6. Si studino gli insiemi (e, implicitamente o esplicitamente, i loro complementari):

   $$\begin{array}{rcl} B & = & \{x : (\forall y > 0)(\varphi_x(y) = \lceil \log_2 y \rceil)\} \\ C & = & \{\langle x, y \rangle : E_x = E_y\} \end{array}$$

   Nel caso di $B$ è gradita la definizione in dettaglio una funzione primitiva ricorsiva ausiliaria opportuna a completare la dimostrazione.

**ESAME 19 FEBBRAIO 2024**

1. Dato un DFA $M$ si definisca la relazione $R_M$. Dato un linguaggio $L$ si definisca la relazione $R_L$. Si dimostri che se $L$ è un linguaggio regolare allora $R_L$ è di indice finito.

2. Si diano le definzioni di insieme ricorsivo e di insieme ricorsivamente enumerabile. Si dimostri che un insieme $A$ è ricorsivo se e solo se sia $A$ che $\bar{A}$ sono ricorsivamente enumerabili

3. Relativamente alla enumerazione delle MdT vista a lezione, si dica (spiegando) se $8 \in K$ o meno.

4. Si definisca in dettaglio la relazione di riduzione tra classi di complessità computazionale. Si mostri dunque che la relazione non è antisimmetrica.[1].

5. Si dica (motivando formalmente la propria affermazione) se i seguenti linguaggi $A_i$ (fissato un certo $i \in \mathbb{N}$) e $A$ siano (o meno) regolari

$$A_i = \left\{ v \in \{0,1\}^* : \begin{array}{l} |v| \leq i \wedge \\ v \text{ letto come numero binario è maggiore o uguale a } i \end{array} \right\}$$

   Dove $A = \bigcup_{i \geq 0} A_i$

6. Si studino gli insiemi (e, implicitamente o esplicitamente, i loro complementari):

$$\begin{array}{rcl} B & = & \{x : \varphi_x(0) = 0 \wedge (\exists y > 0)(\varphi_x(y) = y)\} \\ C & = & \{x : W_x = \{0,2,4,6,8\}\} \end{array}$$

[1] Ovvero che esistono due problemi $A$ e $B$ diversi tra loro per cui $A \leq B$ e $B \leq A$