

## Cenni di computabilità

Stefano Mizzaro

Dipartimento di matematica e informatica  
Università di Udine  
<http://www.dimi.uniud.it/mizzaro/>  
mizzaro@dimi.uniud.it  
Programmazione, lezione 12a  
12 novembre 2007

## Scaletta

- Problemi, domande, risposte
- Algoritmi, programmi, linguaggi di programmazione
- Algoritmi che calcolano funzioni
- Funzioni computabili e non

Stefano Mizzaro - Computabilità

2

## Cosa fa un programma?

- Fornisce **risposte** a **domande**
  - Qual è la radice quadrata di 2345?
  - Qual è il massimo comun divisore di 234 e 36?
- Fornisce risposte a una **classe di domande**
  - Programma per calcolare la radice quadrata di un numero
- "Risolve **problemi**"

Stefano Mizzaro - Computabilità

3

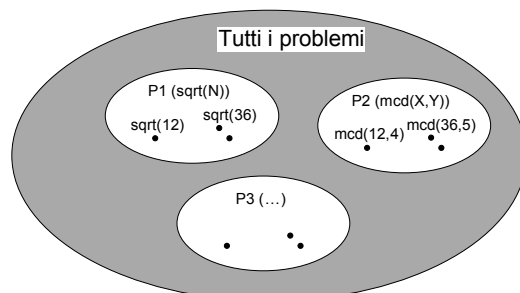
## Definizioni (1/2)

- **Problema** = insieme di domande omogenee
  - Esempi:
    - P1 = Calcolare  $\text{sqrt}(n)$
    - P2 = Calcolare  $\text{mcd}(x,y)$
- **Domanda** ("istanza di un problema")
  - Esempi:
    - I1 = Quanto vale  $\text{sqrt}(341)$ ?
    - I2 = Quanto vale  $\text{mcd}(48,36)$ ?

Stefano Mizzaro - Computabilità

4

## Problemi e domande



Stefano Mizzaro - Computabilità

5

## Definizioni (2/2)

- **Risposta** (a una domanda) = "soluzione di un'istanza"
- **Soluzione di un problema** = metodo generale che permette di fornire in modo uniforme la risposta a tutte le istanze di un problema = **Algoritmo risolvete**

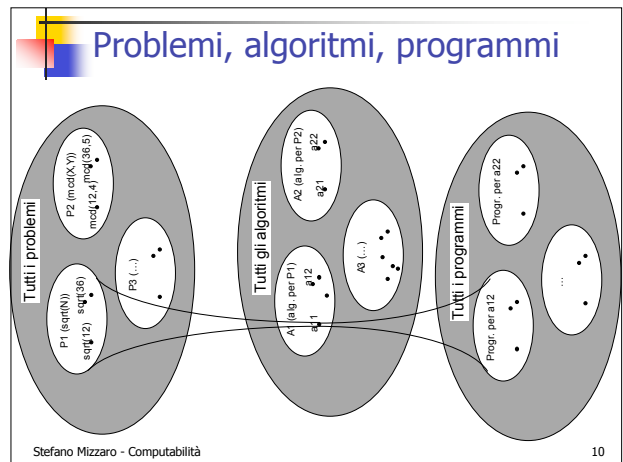
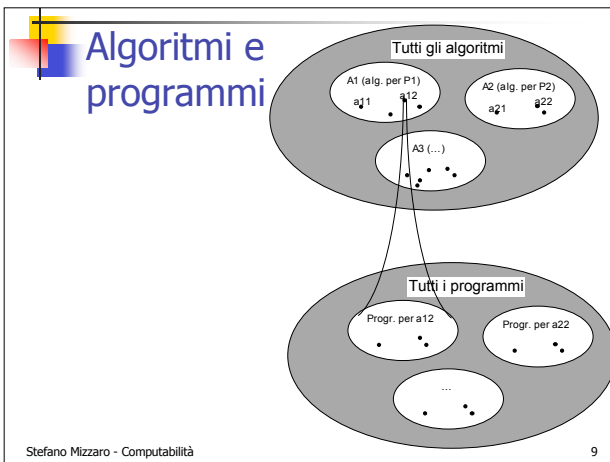
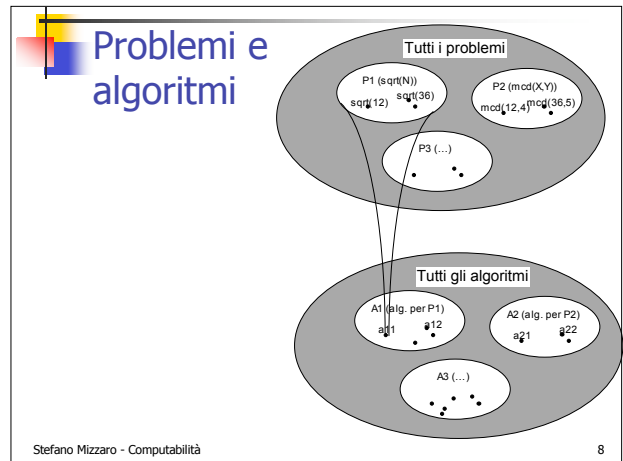
Stefano Mizzaro - Computabilità

6

### Algoritmi e programmi

- **Algoritmo**
  - "Metodo", "procedimento", "sequenza di passi"
  - Astratto
  - Non si può toccare/vedere
- **Programma**
  - Rappresentazione precisa di un algoritmo in un certo **linguaggio di programmazione**
  - Per eseguire/comunicare un algoritmo bisogna rappresentarlo!!

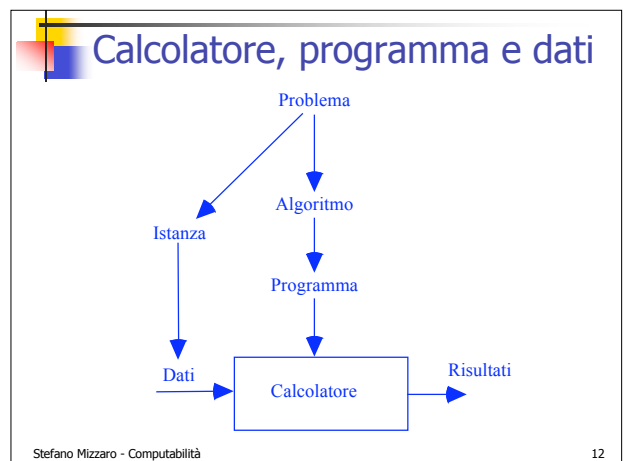
Stefano Mizzaro - Computabilità 7



### Il calcolatore

- È un:
  - Esecutore di algoritmi
  - rappresentati da programmi
  - mediante un linguaggio di programmazione
- Esecutore **universale** di algoritmi
- Un algoritmo va eseguito su dati
  - Es.: calcola  $\text{sqrt}(897)$

Stefano Mizzaro - Computabilità 11



## Finitezza, univocità, effettività

- Un programma/algorithm deve essere:
  - Finito** (# finito di istruzioni)
 

```
if (x == 0) return 1;
else if (x == 1) return 2;
else if (x == 2) return 3;
else if (x == 3) return 4;
else if (x == 4) return 5;
...
```
  - Univoco**, non ambiguo ( $x = x + \text{"un po' "}$ )
  - Effettivo**: deve esistere un calcolatore in grado di eseguire le istruzioni
    - `prossimaVincitaALotto()`

Stefano Mizzaro - Computabilità

13

## Curiosità legittime...

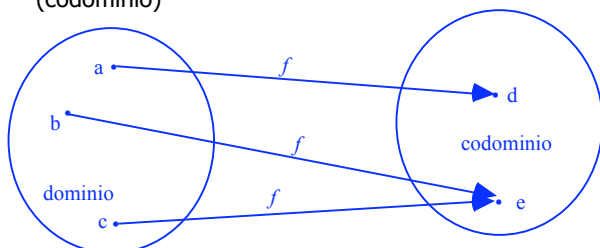
- Ma con gli algoritmi si può fare tutto?
- E se no, che cos'è che si può fare?
- E quello che si può fare dipende dal linguaggio di programmazione scelto?
- A queste domande risponde la **teoria della computabilità (calcolabilità)**
- Approccio formale, matematico, preciso

Stefano Mizzaro - Computabilità

14

## Funzioni

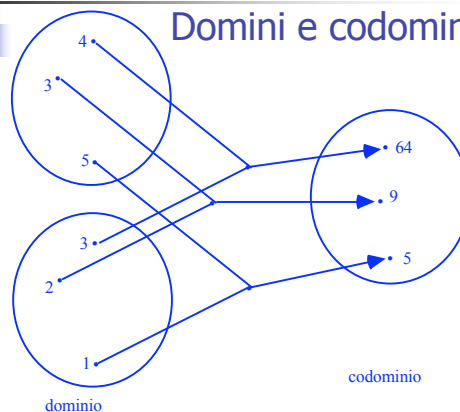
- Funzione = legge che associa a un elemento di un insieme (dominio) un elemento di un insieme (codominio)



Stefano Mizzaro - Computabilità

15

## Domini e codomini



Stefano Mizzaro - Computabilità

16

## Algoritmi calcolano funzioni

- Algoritmo per calcolare la radice quadrata calcola la funzione che associa a un numero la sua radice quadrata
- Algoritmo di Euclide calcola la funzione che dati 2 numeri restituisce il loro MCD
- Sembra riduttivo, ma
  - ... codifica...

Stefano Mizzaro - Computabilità

17

## Quali funzioni?

- Funzioni  $f: R \rightarrow R$ : analisi matematica
- La teoria della computabilità si occupa delle funzioni  $f: N \rightarrow N$
- Parziali
  - Ad esempio programma con un ciclo infinito che non dà nessun output
  - Funzione "non definita"

Stefano Mizzaro - Computabilità

18

### Le funzioni $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

A large yellow oval represents the set of all functions  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Inside this oval, four points are marked and labeled  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$ , and  $f_4$ .

Stefano Mizzaro - Computabilità 19

### Curiosità legittime...

- Def.: **Funzione calcolabile (computabile)** = funzione per cui esiste un algoritmo che la calcola
- Ora, finalmente, possiamo porci una domanda precisa:  
**Le funzioni  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  sono tutte calcolabili?**
- Data una qualsiasi funzione, esiste sempre un algoritmo che la calcola?
  - MCD: ok. Somma: ok. Radice quadrata:...ok.
  - Ma in generale?

Stefano Mizzaro - Computabilità 20

### No! Funzioni calcolabili e non

A large yellow oval represents the set of all functions  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Inside it, a smaller grey oval represents the subset of "Funzioni calcolabili". The remaining area of the yellow oval is labeled "Funzioni non calcolabili". Four points  $f_1, f_2, f_3, f_4$  are scattered within the yellow area, with some inside the grey area.

Stefano Mizzaro - Computabilità 21

### No? Voglio un esempio...

- Il problema della terminazione (*Halting problem*)
  - Trovare un algoritmo  $A$  in grado di dirci se un qualsiasi algoritmo  $A_i$  su dati  $D$  termina.
- (un algoritmo potrebbe non terminare perché entra in un ciclo infinito)

Stefano Mizzaro - Computabilità 22

### Il problema della terminazione

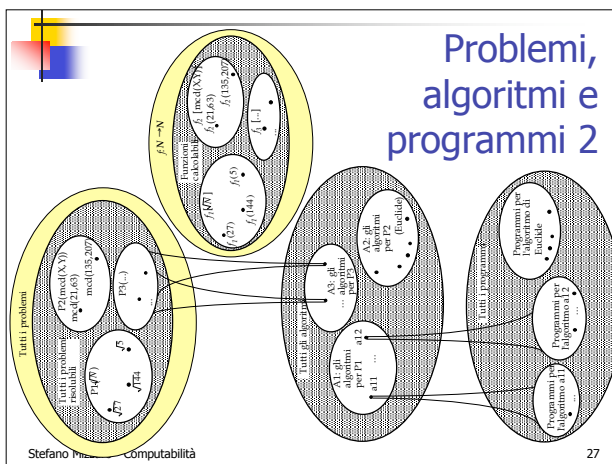
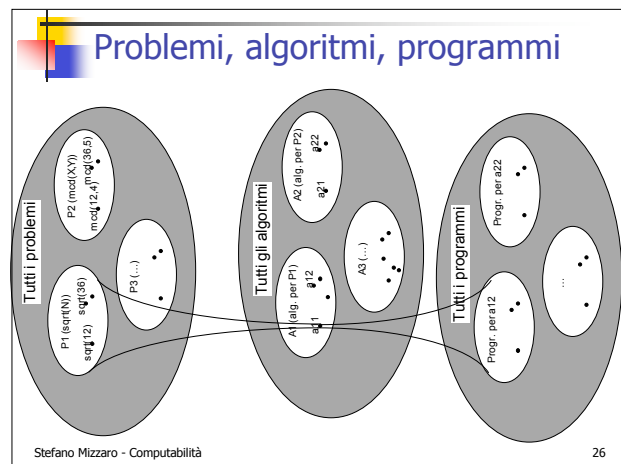
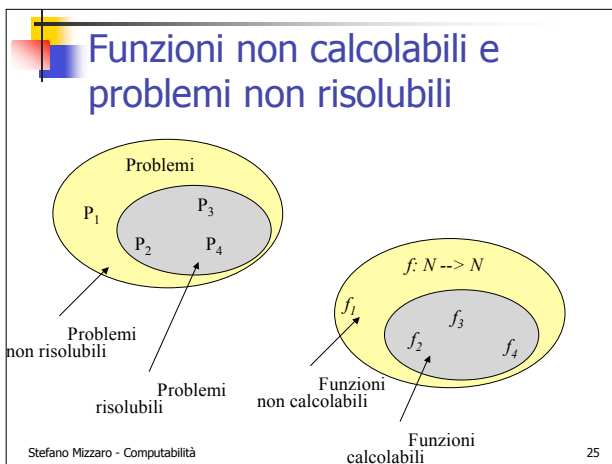
A flowchart showing the process of testing an algorithm. An arrow labeled "Descrizione di un algoritmo  $A_i$ " and another labeled "Dati di ingresso  $D$ " point into a box labeled "Calcolatore". Above the box, an arrow labeled "Algoritmo  $A$ ?" points down to the box. An arrow labeled "Termina / Non termina" points out from the box to the right.

Stefano Mizzaro - Computabilità 23

### Una soluzione?

- Beh, potrei far eseguire  $A_i$  sui dati e attendere
- Se termina so che termina
- Se dopo 2 ore non ha terminato... so che non ha terminato in due ore... ma quanto devo aspettare?!
- Non va!
- Teorema:  $A$  non esiste

Stefano Mizzaro - Computabilità 24



- ### Riferimenti
- <http://www.dimi.uniud.it/mizzaro/papers/algorithmo.pdf>
  - Capp. 3 e 4
  - Sostituite:
    - Ufficio / Calcolatore
    - Impiegato / Processore
    - Diagramma di flusso / Programma
- Stefano Mizzaro - Computabilità 28

- ### Riassunto
- Problemi, domande, risposte
  - Algoritmi, programmi, linguaggi di programmazione
  - Algoritmi che calcolano funzioni
  - Funzioni computabili e non
- Stefano Mizzaro - Computabilità 29