Appunti del corso

Matematica e Democrazia

Paolo Serafini, a.a. 2012-13

revisione: 19 novembre 2015

Introduzione

Allocazione dei seggi ai distretti

1 Definizioni

Nei sistemi a rappresentanza proporzionale il numero dei seggi di un parlamento viene preliminarmente diviso fra i distretti (o circoscrizioni) elettorali in base alle rispettive popolazioni. La scelta dei distretti viene normalmente fatta in base ad una preesistente divisione politica della nazione. Ad esempio nella Camera del Parlamento Italiano le circoscrizioni sono ritagliate sulle regioni con un'ulteriore suddivisione per le regioni più popolate. Negli Stati Uniti la Camera dei Rappresentanti viene divisa per stati.

In linea di massima il numero di seggi di un parlamento è fissato e bisogna allocare i seggi ai distretti in modo proporzionale alle popolazioni. Questa non è necessariamente una regola universale. Nel Parlamento Europeo, ad esempio, vige un'altra regola che verrà esposta nel Capitolo 6. Una regola, che però non ha finora trovato riscontro nella realtà, potrebbe basare il numero di rappresentanti per distretto sul numero di votanti, anziché sulla popolazione. Questa scelta ovviamente implicherebbe che tale numero andrebbe calcolato dopo le elezioni.

I dati su cui basare l'allocazione dei seggi sono: la popolazione totale P della nazione, il numero totale H di seggi da allocare e le popolazioni p_j per ogni distretto $j = 1, \ldots, m$, dove, naturalmente, $P = \sum_j p_j$. Da questi dati bisogna calcolare il numero s_j di seggi da allocare al distretto j, con il vincolo $H = \sum_j s_j$.

Quanto esposto in questo capitolo può valere anche per il problema di allocare i seggi alle liste su scala nazionale. Basta sostituire il termine 'popolazione totale' con 'voti totali', 'distretto' con 'lista', e 'popolazione del distretto' con 'voti ottenuti dalla lista'. Dal punto di vista matematico si tratta dello stesso problema. Tuttavia sono presenti delle peculiarità quando si tratta di allocare i seggi alle liste che non trovano riscontro nel problema di allocare i seggi ai distretti. Il requisito di proporzionalità è centrale nell'allocazione dei seggi ai distretti, mentre lo è di meno nell'allocazione dei seggi alle liste, perché qui si presenta un problema che non esiste nell'altro caso, ovvero la formazione di maggioranze e minoranze, l'esistenza di soglie di sbarramento più altre eventuali regole. Inoltre i voti alle liste sono spesso contraddistinti da elenchi di preferenze per candidati e i seggi devono essere non solo allocati alle liste ma anche ai candidati sulla base delle preferenze espresse. Alcune peculiarità dell'allocazione dei seggi alle liste su scala nazionale verranno esposte nel capitolo successivo.

Da questi dati si definiscono alcune quantità utili nella definizione del problema. Il rapporto

$$d = \frac{P}{H}$$

definisce quanti cittadini, a livello nazionale, sono necessari per formare un seggio e tale valore viene chiamato *costo del seggio a livello nazionale* (*district size*). Simile nel significato è il suo reciproco

$$r = \frac{H}{P}$$

	P	H	d
India (Lok Sabha)	1 210 193 422	552	2 192 379
USA (House of Representatives)	309 183 463	435	710 767
Russia (Duma)	≈142 500 000	450	≈316 000
Germania (Bundestag)	81 802 257	⩾ 598	⩽136 793
Francia (Assemblée nationale)	64 714 074	577	112 156
UK (House of Commons)	62 008 048	650	95 396
Italia (Camera dei Deputati)	60 340 328	618	97 638
Spagna (Congreso de los Diputatos)	45 989 016	350	131 397
Polonia (Sejm)	38 167 329	460	82 972
Paesi Bassi (Tweede Kamer)	16 574 989	150	110 499
Svezia (Riksdag)	9 340 682	349	26 764
Austria (Nationalrat)	8 375 290	183	45 766

Tabella 1: Popolazioni, seggi e costo del seggio in alcuni paesi

che rappresenta la frazione di seggio 'posseduta' da ogni cittadino (*rappresentatività del cittadino*). Può essere utile vedere quali siano questi valori in alcuni paesi. Si veda la Tabella 1 dove sono riportati i seggi della camera politicamente più importante di ogni nazione. Si noti che la popolazione degli USA è quella valutata per l'allocazione dei seggi e non comprende il Distretto di Columbia (non rappresentato in Congresso) ma comprende invece tutti i cittadini temporaneamente all'estero [31]. Il valore di popolazione russa è quello stimato dalla CIA. Il numero di seggi del Bundestag tedesco è variabile in quanto al valore base di 598 si possono aggiungere alcuni parlamentari eletti in una prima fase con il sistema uninominale. Il numero di seggi della Camera dei Deputati italiana è di 630 ma 12 di questi sono eletti nella circoscrizione estero e quindi non sono valutati nel calcolo del costo del seggio d. Come si può vedere dai dati il caso italiano non è anomalo rispetto ad altri paesi di grandezza comparabile.

Se i seggi potessero essere frazionari e si adottasse il principio della proporzionalità pura, allora i seggi corrisponderebbero ai seguenti valori

$$q_j = \frac{p_j}{P} H = p_j r = \frac{p_j}{d}$$

detti *quote o quozienti naturali* o anche *quote di Hare*. Una volta allocati i seggi le stesse quantità si possono definire per i distretti. Il costo del seggio nel distretto è definito da

$$d_j = \frac{p_j}{s_j} = \frac{q_j}{s_j} d$$

e analogamente la *rappresentatività* del cittadino nel distretto j è definita da

$$r_j = \frac{s_j}{p_j} = \frac{1}{d_j} = \frac{s_j}{q_j} r$$

dove si vede che i valori d_j e r_j sono tanto più vicini ai valori nazionali quanto più il numero di seggi s_j si avvicina alla quota naturale q_j. Vale la seguente relazione

$$|s_j - q_j| = p_j \, |r_j - r| \tag{1}$$

da dove si vede che la deviazione assoluta dei seggi dalle quote naturali corrisponde alla deviazione assoluta della rappresentatività nel distretto da quella nazionale, pesata per la rispettiva popolazione.

Inoltre

$$|r_j - r| = r\,|\frac{s_j}{q_j} - 1| \tag{2}$$

da dove si vede che la deviazione assoluta della rappresentatività nel distretto da quella nazionale è proporzionale alla deviazione relativa dei seggi dalle quote naturali. Si parla di *Violazione della quota* se

$$s_j \notin \{\lfloor q_j \rfloor \;,\; \lceil q_j \rceil\}$$

cioè se i seggi non sono ottenuti semplicemente arrotondando (per eccesso o per difetto) le quote naturali. L'allocazione rispetta la *Monotonia* se

$$p_i \leqslant p_j \quad \Longrightarrow \quad s_i \leqslant s_j$$

cioè i seggi allocati ai distretti mantengono lo stesso ordinamento delle rispettive popolazioni. La monotonia è una proprietà fondamentale per ogni metodo di allocazione dei seggi deve possedere. Un'ulteriore forma di monotonia consiste nel valutare come cambia l'allocazione dei seggi a fronte di un cambiamento della popolazione. Siano $\delta p_i = p'_i - p_i$ e $\delta s_i = s'_i - s_i$ i rispettivi cambiamenti. Si dice che l'allocazione rispetta la *Monotonia incrementale* se

$$(\delta s_i > 0 \;\wedge\; \delta s_j < 0) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\delta p_i}{p_i} \geqslant \frac{\delta p_j}{p_j}$$

o equivalentemente

$$(\delta s_i > 0 \;\wedge\; \delta s_j < 0) \quad \Longrightarrow \quad \frac{p'_i}{p_i} \geqslant \frac{p'_j}{p_j}$$

Cioè, se in un distretto la popolazione aumenta relativamente più di un altro distretto, non può avvenire che il primo distretto perda seggi e il secondo ne guadagni.

Purtroppo non è sempre possibile ottenere un'allocazione che non violi le quote e soddisfi i due requisiti di monotonia. Il *Teorema di impossibilità* di Balinski e Young [7] afferma infatti:

Teorema 1. Non esiste alcun metodo di allocazione dei seggi che possa garantire sempre la non violazione delle quote, la monotonia e la monotonia incrementale.

Dimostrazione: È sufficiente mostrare un'istanza in cui ogni allocazione violi almeno uno dei tre requisiti. Si consideri la seguente istanza, con $H = 7$:

$$p_1 = q_1 = 5 + \varepsilon, \qquad p_2 = q_2 = \frac{2}{3}, \qquad p_3 = q_3 = \frac{2}{3}, \qquad p_4 = q_4 = \frac{2}{3} - \varepsilon$$

In ogni soluzione che non violi le quote e rispetti la monotonia si deve avere $s_4 = 0$ e $s_1 \in \{5, 6\}$. Si considerino ora le nuove popolazioni

$$p'_1 = q'_1 = 4 - \varepsilon, \qquad p'_2 = q'_2 = 2 - \frac{\varepsilon}{2}, \qquad p'_3 = q'_3 = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad p'_4 = q'_4 = \frac{1}{2} + \varepsilon$$

Ora, in ogni soluzione che non violi le quote e rispetti la monotonia (questa volta è il terzo distretto ad essere il più piccolo), si deve avere $s_4 = 1$ e $s_1 \in \{3, 4\}$. I rapporti sono

$$\frac{p'_1}{p_1} = \frac{4-\varepsilon}{5+\varepsilon}, \qquad \frac{p'_2}{p_2} = 3 - \frac{3}{4}\,\varepsilon, \qquad \frac{p'_3}{p_3} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\,\varepsilon, \qquad \frac{p'_4}{p_4} = \frac{3+6\,\varepsilon}{4-6\,\varepsilon}$$

con
$$\frac{p'_2}{p_2} > \frac{p'_1}{p_1} > \frac{p'_4}{p_4} > \frac{p'_3}{p_3}$$
Come si vede la monotonia incrementale viene violata dai distretti 1 e 4. Questo controesempio può essere esteso aggiungendo un numero arbitrario di distretti con quote intere per le quali l'allocazione dei seggi risulti fissata quindi a tale valore intero e variando di conseguenza H. ∎

Naturalmente non viene escluso che i tre requisiti possano essere soddisfatti in molti casi. Come vedremo, il metodo dei resti più alti garantisce la non violazione della quota, mentre i metodi dei divisori garantiscono la monotonia incrementale. La monotonia semplice viene invece sempre garantita da ogni metodo.

2 Metodo dei resti più alti

Il *Metodo dei resti più alti* è noto anche come *metodo di Hamilton* oppure come *metodo di Vinton* o come metodo di *Hare* o anche come di *Hare-Niemayer*. Questa abbondanza di nomi per designare lo stesso metodo è dovuta al fatto che più persone in tempi diversi hanno ogni volta 'reinventato' il metodo. Il primo comunque sembra essere Hamilton (lo statista americano Alexander Hamilton, non il matematico irlandese William Rowan Hamilton) e quindi sembra più corretto usare il suo nome. Il Metodo dei resti più alti è forse il metodo più semplice per allocare i seggi a partire dai quozienti naturali. Inizialmente si assegnano i seggi
$$s_j := \lfloor q_j \rfloor$$
Il numero di seggi allocati è quasi certamente minore di H (dato che $\sum_j q_j = H$ ed è altamente improbabile che tutti i valori q_j siano interi) e quindi rimangono alcuni seggi da allocare. Quali seggi allocare viene determinato in base ai *resti*
$$\langle q_j \rangle := q_j - \lfloor q_j \rfloor$$
Siccome
$$\sum_j \langle q_j \rangle = \sum_j q_j - \sum_j \lfloor q_j \rfloor = H - \sum_j \lfloor q_j \rfloor$$
i seggi ancora da allocare sono $\sum_j \langle q_j \rangle$ e vengono allocati ai distretti con i resti $\langle q_j \rangle$ più alti. Si noti che necessariamente $s_j \in \{\lfloor q_j \rfloor, \lceil q_j \rceil\}$, ovvero non c'è violazione della quota.

Inoltre il metodo dei resti più alti rispetta la Monotonia. Si ha infatti
$$p_j > p_i \quad \Longrightarrow \quad q_j > q_i \quad \Longrightarrow \quad \lfloor q_j \rfloor \geqslant \lfloor q_i \rfloor$$
Se $\lfloor q_j \rfloor = \lfloor q_i \rfloor$ allora $\langle q_j \rangle > \langle q_i \rangle$ e quindi $s_j \geqslant s_i$. Se invece $\lfloor q_j \rfloor > \lfloor q_i \rfloor$ allora $s_j \geqslant s_i$.

La regola dei resti più alti può essere generalizzata a quozienti arbitrari q_j la cui somma non sia necessariamente uguale ad H. Sono state infatti proposti anche i seguenti quozienti

quozienti di Hagenbach-Bischoff	$q_j = \frac{p_j}{P}(H+1)$
quozienti di Imperiali	$q_j = \frac{p_j}{P}(H+2)$
quozienti di Droops	$q_j = \frac{p_j}{1 + \lfloor P/(H+1) \rfloor}$

Si tratta di quozienti usati soprattutto per determinare i seggi da allocare alle liste in base ai voti ricevuti e soprattutto calcolare i seggi in base alle preferenze. Tuttavia potrebbero essere usati anche per l'allocazione dei seggi ai distretti.

L'estensione della regola dei resti più alti a quote arbitrarie prevede che, dopo avere allocato i seggi $\lfloor q_j \rfloor$, se $H > \sum_j \lfloor q_j \rfloor$ i rimanenti seggi vengono allocati secondo i resti più alti ripetendo ciclicamente l'operazione fino ad esaurimento dei seggi mancanti. Viceversa se $H < \sum_j \lfloor q_j \rfloor$ i seggi in eccesso vengono tolti, secondo i resti più bassi, ripetendo ciclicamente l'operazione fino ad esaurimento dei seggi in eccesso, escludendo i distretti con zero seggi allocati.

Esempio 1. Con i dati

$$p = (\,916 \quad 40 \quad 15\,), \qquad P = 971, \qquad H = 100$$

si hanno le seguenti quote e conseguenti allocazioni di seggi

	q_1	q_2	q_3	$\sum_j \lfloor q_j \rfloor$	s_1	s_2	s_3
Hare	94.3357	4.11946	1.54480	99	94	4	2
Hagenbach-Bischoff	95.2791	4.16066	1.56025	100	95	4	1
Imperiali	96.2225	4.20185	1.57570	101	96	3	1
Droops	91.6000	4.00000	1.50000	96	93	5	2

∎

La regola dei resti più alti, oltre a non violare le quote (se applicata alle quote naturali), gode inoltre dell'importante proprietà enunciata nel Teorema 3. Preliminarmente dimostriamo il seguente lemma dove si è usata la notazione $a^+ = \max\{a, 0\}$.

Lemma 2. La regola dei resti più alti produce la stessa allocazione, sia applicata a quote q_j che a quote $(q_j + \alpha)^+$ con α tale che $\sum_j (q_j + \alpha)^+ = H$.

Dimostrazione: Si consideri l'ordine indotto dai resti $\langle q_j \rangle$. Esaminiamo il caso $\sum_j q_j < H$ per cui $\alpha > 0$. Aumentando α dal valore 0, il distretto con il massimo resto, per il valore $\alpha = 1 - \max_j \langle q_j \rangle$, aumenta di uno il numero di seggi allocati tramite $\lfloor q_j \rfloor$ e nello stesso tempo il suo resto diventa il più piccolo. Continuando ad aumentare α si assegnano i seggi esattamente come con la regola dei resti più alti. Nel caso $\sum_j q_j > H$ (per cui $\alpha < 0$), diminuendo α dal valore 0, il distretto con il minimo resto è il primo ad avere tolto un seggio e contemporaneamente il suo resto diventa il più alto. Il seggio non viene tolto se già $\lfloor q_j \rfloor = 0$. Anche in questo caso continuando a diminuire α si assegnano i seggi come con la regola dei resti più alti. ∎

L'ipotesi di $\sum_j (q_j + \alpha)^+ = H$, presente nel lemma, in realtà non è del tutto necessaria. Il lemma rimane valido per qualsiasi α positivo. Se α è negativo può avvenire che molti distretti vengono azzerati e a quel punto viene persa l'informazione su chi aveva le quote più alte e quindi l'allocazione successiva, necessaria se $\sum_j \lfloor (q_j + \alpha)^+ \rfloor < H$, produce una distribuzione che tende ad essere uniforme. Ad esempio si supponga di avere quote $q_1 = 5.1$, $q_2 = 1.7$, $q_3 = 1.2$, per un numero di seggi $H = 8$. I seggi che si ottengono sono $s_1 = 5$, $s_2 = 2$, $s_3 = 1$. Se si esegue il calcolo con $\alpha = -2$ si ottengono le quote $q_1 = 3.1$,

$q_2 = 0$, $q_3 = 0$ per le quali i seggi allocati diventano $s_1 = 4$, $s_2 = 2$, $s_3 = 2$. Se invece si esegue il calcolo con $\alpha = 2$ si ottengono le quote $q_1 = 7.1$, $q_2 = 3.7$, $q_3 = 3.2$ per le quali vengono inizialmente allocati 13 seggi. I 5 seggi in eccesso vengono tolti nell'ordine a 1, a 3, a 2, poi di nuovo a 1 e a 3, producendo $s_1 = 5$, $s_2 = 2$, $s_3 = 1$.

Si noti ancora che, in base al lemma, la regola dei resti più alti può venire riformulata come segue: si determini α in modo che $\sum_j \lfloor (q_j + \alpha)^+ \rfloor = H$ e si ponga $s_j = \lfloor (q_j + \alpha)^+ \rfloor$.

Teorema 3. Assegnate quote arbitrarie q_j, la regola dei resti più alti minimizza ognuna delle seguenti norme che misurano lo scostamento rispetto alle quote:

$$\sum_j |q_j - s_j|, \qquad \sum_j |q_j - s_j|^2, \qquad \max_j |q_j - s_j|.$$

Dimostrazione: Sia α (eventualmente negativo) tale che $\sum_j (q_j + \alpha)^+ = H$. Si noti che l'operatore $(\cdot)^+$ non è l'identità solo se $\sum_j q_j > H$ e quindi $\alpha < 0$. Si denoti $J(\alpha) := \{j : q_j + \alpha \geqslant 0\}$. Se $\alpha > 0$ si ha ovviamente $J(\alpha) = \{1, \ldots, m\}$ e $|J(\alpha)| = m$. Allora

$$\alpha = \frac{H - \sum_{j \in J(\alpha)} q_j}{|J(\alpha)|}$$

Dimostriamo dapprima che l'allocazione *frazionaria* di seggi $(q_j + \alpha)^+$ minimizza le norme rispetto a tutte le allocazioni frazionarie di seggi. Un teorema di Analisi Convessa (si veda ad esempio [15] pag. 136, riportato in [26] pag. 26) afferma che, dato un insieme convesso chiuso S ed un punto $q \notin S$ vale la relazione di dualità forte

$$\min_{s \in S} \|q - s\|_u = \max_{\|y\|_v \leqslant 1} (y^\top q - \varphi_S(y)) \tag{3}$$

dove $\varphi_S(y)$ è il funzionale di supporto a S definito come

$$\varphi_S(y) = \sup_{x \in S} y^\top x$$

e le norme $\|\cdot\|_u$ e $\|\cdot\|_v$ sono definite una in uno spazio e l'altra in quello duale per cui $1/u + 1/v = 1$, includendo anche il caso $u = 1$ e $v = \infty$ e viceversa. Nel nostro caso $S = \{s : \sum_j s_j = H, s_j \geqslant 0\}$ e quindi $\varphi_S(y) = H \max_j y_j$, per cui (3) diventa

$$\min_{s \in S} \|q - s\|_u = \max_{\|y\|_v \leqslant 1} (y^\top q - H \max_j y_j) \tag{4}$$

Applichiamo (4) al caso di norma $u = 1$ e $v = \infty$. Si ha

$$\sum_j |q_j - s_j| = \sum_{j \in J(\alpha)} |\alpha| + \sum_{j \notin J(\alpha)} q_j = \sum_{j \in J(\alpha)} \frac{|H - \sum_{i \in J(\alpha)} q_i|}{|J(\alpha)|} + \sum_{j \notin J(\alpha)} q_j = |H - \sum_{i \in J(\alpha)} q_i| + \sum_{j \notin J(\alpha)} q_j$$

Se $\sum_j q_j > H$ si ha

$$\sum_j |q_j - s_j| = \sum_j q_j - H = |H - \sum_j q_j|$$

e se $\sum_j q_j < H$, l'insieme $J(\alpha)$ contiene tutti gli indici, per cui si ha in ogni caso

$$\sum_j |q_j - s_j| = |H - \sum_j q_j|$$

Si prenda ora $y = \mathbf{1}$ se $\sum_j q_j > H$ e $y = -\mathbf{1}$ se $\sum_j q_j \leqslant H$. La relazione (4) è soddisfatta e quindi s deve essere ottimo.

Applichiamo ora (4) al caso di norma $u = \infty$ e $v = 1$. Si ha

$$\max_j |q_j - s_j| = \max \left\{ |\alpha| \; ; \; \max_{j \notin J(\alpha)} q_j \right\} = |\alpha|$$

Si prenda ora, nel caso $\sum_j q_j > H$, $y_j = 1/|J(\alpha)|$ se $j \in J(\alpha)$ e $y_j = 0$ se $j \notin J(\alpha)$, mentre nel caso $\sum_j q_j < H$, si prenda $y_j = 1/m$. Anche in questo caso la relazione (4) è soddisfatta e quindi s deve essere ottimo.

Applichiamo infine (4) al caso di norma $u = 2$ e $v = 2$. Si ha

$$\sum_j |q_j - s_j|^2 = \alpha^2 \, |J(\alpha)| + \sum_{j \notin J(\alpha)} q_j^2$$

Si prenda y uguale a $y_j = -\gamma \, \alpha$, $j \in J(\alpha)$, $y_j = \gamma \, q_j$, $j \notin J(\alpha)$, con γ costante di normalizzazione affinché $\sum_j y_j^2 = 1$ e quindi

$$\gamma^2 = \frac{1}{\alpha^2 \, |J(\alpha)| + \sum_{j \notin J(\alpha)} q_j^2}$$

Allora

$$(y^\top q - H \max_j y_j)^2 = \gamma^2 \, (-\alpha \sum_{j \in J(\alpha)} q_j + \sum_{j \notin J(\alpha)} q_j^2 + \alpha \, H)^2 = \gamma^2 \, (\alpha^2 \, |J(\alpha)| + \sum_{j \notin J(\alpha)} q_j^2)^2$$

Anche in questo caso la relazione (4) è soddisfatta e quindi s deve essere ottimo.

Si consideri ora che i seggi devono essere interi. Si noti che

$$H - |J(\alpha)| \leqslant \sum_{j \in J(\alpha)} \left\lfloor (q_j + \alpha)^+ \right\rfloor \leqslant H, \qquad H \leqslant \sum_{j \in J(\alpha)} \left\lceil (q_j + \alpha)^+ \right\rceil \leqslant H + |J(\alpha)|$$

Quindi esiste una soluzione tale che

$$s_j \in \{ \lfloor q_j - \alpha \rfloor \; ; \; \lceil q_j - \alpha \rceil \}, \quad j \in J(\alpha), \qquad s_j = 0, \quad j \notin J(\alpha)$$

Si vede immediatamente che la soluzione ottima (per ogni tipo di norma) per le quote $(q_j + \alpha)^+$ si ottiene in base alla regola dei resti più alti. In base al precedente lemma la regola dei resti più alti applicata a q_j fornisce la stessa allocazione ottima di seggi. ∎

Si noti che il metodo si può reinterpretare in questo modo: si fissano delle quote, come valori ideali di seggi da allocare; essendo le quote frazionarie, vanno arrotondate; l'arrotondamento può essere effettuato in modi diversi, ad esempio per difetto (come si è fatto fin qui) oppure per eccesso o all'intero più vicino; se i seggi ottenuti in questo modo sono H il metodo termina, altrimenti si modificano le quote in modo additivo trovando il parametro α per cui, riapplicando la medesima tecnica alle quote modificate $q_j + \alpha$ si ottengono H seggi. Come si vede dalla dimostrazione del Lemma 2 si ottiene in ogni caso la medesima allocazione. Vedremo più avanti che applicando quest'idea all'errore relativo anziché a quello assoluto si ottengono invece delle notevoli differenze a seconda del tipo di arrotondamento.

Il metodo dei resti più alti è espressamente previsto dalla Costituzione Italiana per la determinazione dei seggi della Camera dei Deputati e del Senato. L'articolo 56 infatti recita:

> *La Camera dei deputati è eletta a suffragio universale e diretto.*
>
> *Il numero dei deputati è di seicentotrenta, dodici dei quali eletti nella circoscrizione Estero.*
>
> *Sono eleggibili a deputati tutti gli elettori che nel giorno delle elezioni hanno compiuto i venticinque anni di età.*
>
> *La ripartizione dei seggi tra le circoscrizioni, fatto salvo il numero dei seggi assegnati alla circoscrizione Estero, si effettua dividendo il numero degli abitanti della Repubblica, quale risulta dall'ultimo censimento generale della popolazione, per seicentodiciotto e distribuendo i seggi in proporzione alla popolazione di ogni circoscrizione, sulla base dei quozienti interi e dei più alti resti.*

mentre l'articolo 57 recita:

> *Il Senato della Repubblica è eletto a base regionale, salvi i seggi assegnati alla circoscrizione Estero.*
>
> *Il numero dei senatori elettivi è di trecentoquindici, sei dei quali eletti nella circoscrizione Estero.*
>
> *Nessuna Regione può avere un numero di senatori inferiore a sette; il Molise ne ha due, la Valle d'Aosta uno.*
>
> *La ripartizione dei seggi fra le Regioni, fatto salvo il numero dei seggi assegnati alla circoscrizione Estero, previa applicazione delle disposizioni del precedente comma, si effettua in proporzione alla popolazione delle Regioni, quale risulta dall'ultimo censimento generale, sulla base dei quozienti interi e dei più alti resti.*

Gli articoli 56 e 57 nella presente versione sono quelli entrati in vigore con la legge costituzionale del 23/1/2001 che istituiva la circoscrizione Estero. Gli articoli originali della costituzione del 1948 erano abbastanza diversi:

> *Art. 56*
>
> *La camera dei deputati è eletta a suffragio universale e diretto, in ragione di un deputato ogni ottantamila abitanti o per frazione superiore a quarantamila.*
>
> *Sono eleggibili a deputati tutti gli elettori che nel giorno delle elezioni hanno compiuto i venticinque anni di età*
>
> *Art. 57*
>
> *Il Senato della Repubblica è eletto a base regionale.*
>
> *A ciascuna Regione è attribuito un senatore per duecentomila abitanti o per frazione superiore a centomila.*
>
> *Nessuna Regione può avere un numero di senatori inferiore a sei. La Valle d'Aosta ha un solo senatore.*

Come si vede gli articoli originali fissavano il costo di un seggio in modo che fosse per ogni circoscrizione il valore più vicino ad 80.000 abitanti per la Camera e 200.000 per il Senato e quindi il numero totale di seggi veniva determinato di conseguenza. Tali articoli furono modificati con la legge costituzionale del 9/2/1963 che era uguale all'attuale tranne la parte riguardante la circoscrizione Estero (e per il Senato, l'aggiunta del Molise). Nell'attuale forma è fissato il numero di seggi e questi vengono assegnati con la regola dei quozienti naturali e dei resti più alti.

Nella formulazione del 1948 tuttavia non è specificato se il computo dei seggi effettuato dividendo la popolazione per 80.000 (o per 200.000) e poi arrotondando all'intero più vicino viene fatto a livello di circoscrizione e poi il numero dei seggi a livello nazionale si ottiene semplicemente come somma dei seggi delle circoscrizioni oppure viene fatto anche a livello nazionale, nel qual caso sorge il problema di conciliare i valori di circoscrizione con quelli nazionali nel caso, molto probabile, che la somma non coincida con il valore nazionale. Nelle tre elezioni politiche (1948, 1953 e 1958) prima della riforma del 1963 i seggi della Camera furono rispettivamente 574, 590 e 596.

3 Paradossi

Il metodo di Hamilton fu usato per determinare il numero di seggi per stato nella Camera dei Rappresentanti degli Stati Uniti nei censimenti dal 1850 al 1890 (il censimento negli Stati Uniti viene effettuato negli anni multipli di 10 e, fra le altre cose, serve a determinare la ripartizione dei seggi basata sui dati aggiornati di popolazione) e fu infine abbandonato a causa di un fenomeno imprevisto.

Una ragionevole richiesta ad un metodo di allocazione dei seggi è che, se il numero totale di seggi H aumenta, nella nuova allocazione nessun distretto dovrebbe perdere seggi. Si considerino i seguenti semplici dati:

Esempio 2. Con i dati

$$p_1 = 50, \qquad p_2 = 30, \qquad p_3 = 10, \qquad H = 4$$

si hanno le quote naturali

$$q_1 = 2.222, \qquad q_2 = 1.333, \qquad q_3 = 0.444$$

e quindi i seggi

$$s_1 = 2, \qquad s_2 = 1, \qquad s_3 = 1$$

Se adesso si aumentano i seggi globali a $H = 5$ si ottengono le quote naturali

$$q_1 = 2.778, \qquad q_2 = 1.667, \qquad q_2 = 0.556$$

per le quali il metodo dei resti più alti fornisce i seggi

$$s_1 = 3, \qquad s_2 = 2, \qquad s_3 = 0$$

∎

Come si vede si ottiene il paradossale risultato che il terzo distretto perde un seggio mentre il numero totale di seggi aumenta. Per capire meglio il fenomeno si consideri la Figura 1. Tutti i valori sono riportati sul simplesso $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_i \geqslant 0\}$ e tutte le possibili allocazioni di seggi sono rappresentati come punti in S, cioè

$$\{\frac{s}{H} : s_1 + s_2 + s_3 = H, s_i \geqslant 0 \text{ intero}\}, \qquad \text{punti bianchi}$$
$$\{\frac{s}{H+1} : s_1 + s_2 + s_3 = H+1, s_i \geqslant 0 \text{ intero}\} \qquad \text{punti neri}$$

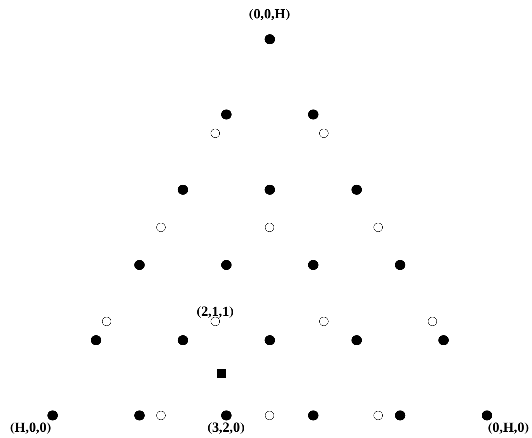


Figura 1: Il paradosso dell'Alabama

I tre vertici di S (il triangolo in figura) corrispondono alle allocazioni $(H, 0, 0)$ (in basso a sinistra), $(0, H, 0)$ (in basso a destra), $(0, 0, H)$ (in alto). Le quote normalizzate

$$q = \left\{ \frac{50}{90}, \frac{30}{90}, \frac{10}{90} \right\}$$

sono le stesse per entrambi i casi e corrispondono al quadratino nero. È chiaro che aumentare H ha l'effetto di rendere più fitta la griglia delle allocazioni ammissibili sul simplesso. Mentre il punto $(2, 1, 1)/4$ è il più vicino a q per i punti bianchi, l'infittimento ha cambiato le posizioni dei punti ed è ora il punto $(3, 2, 0)/5$ ad essere il punto nero più vicino a q. Si vedano in [8] diversi diagrammi geometrici che illustrano i vari paradossi.

L'effetto indesiderato fu scoperto dopo il censimento del 1880 negli Stati Uniti quando lo stato di Rhode Island passò da due seggi ad uno mentre il numero totale di seggi veniva aumentato da 270 a 280. A causa di questo effetto, l'Ufficio del Censo (U.S. Census Office) eseguì un calcolo di prova per tutti i valori di H da 275 a 350. Risultò che passando da 299 a 300 seggi lo stato dell'Alabama passava da 8 a 7 seggi. Da questo fatto discende il nome del paradosso.

Il paradosso noto come *Paradosso della popolazione* (*population paradox*) si riferisce al requisito di monotonia incrementale. Può avvenire infatti che un distretto con una crescita della popolazione maggiore rispetto ad un altro distretto, anche in termini relativi, perda invece un seggio a favore di questo distretto.

Esempio 3. Si considerino le seguenti popolazioni per un numero di seggi $H = 10$:

$$p_1 = 550, \qquad p_2 = 290, \qquad p_3 = 60, \qquad p_4 = 100$$

che danno le quote naturali

$$q_1 = 5.5, \qquad q_2 = 2.9, \qquad q_3 = 0.6, \qquad q_4 = 1.0$$

con conseguenti seggi

$$s_1 = 5, \qquad s_2 = 3, \qquad s_3 = 1, \qquad s_4 = 1.$$

Si supponga ora che ci sia una migrazione interna fra i distretti che porta alle seguenti popolazioni

$$p_1 = 580, \qquad p_2 = 280, \qquad p_3 = 69, \qquad p_4 = 71.$$

Il primo e il terzo distretto sono aumentati, ma il terzo è aumentato in percentuale del 15%, mentre il primo è aumentato solo del 5.45%. Le quote naturali diventano

$$q_1 = 5.8, \qquad q_2 = 2.8, \qquad q_3 = 0.69, \qquad q_4 = 0.71$$

con conseguenti seggi

$$s_1 = 6, \qquad s_2 = 3, \qquad s_3 = 0, \qquad s_4 = 1.$$

Quindi il terzo distretto, pur avendo la massima crescita percentuale ed avendo anche aumentato la sua quota, ha perso un seggio! ∎

La questione può assumere aspetti ancora più drammatici nel senso che pur avendo una popolazione in aumento si può cedere un seggio ad un distretto la cui popolazione sta calando.

Esempio 4. Sia $H = 100$ e

$$p_1 = 657, \qquad p_2 = 237, \qquad p_3 = 106,$$

che danno le quote naturali

$$q_1 = 65.70, \qquad q_2 = 23.70, \qquad q_3 = 10.60$$

con conseguenti seggi

$$s_1 = 66, \qquad s_2 = 24, \qquad s_3 = 10.$$

Le nuove popolazioni siano

$$p'_1 = 660, \qquad p'_2 = 245, \qquad p'_3 = 105,$$

che danno le quote naturali

$$q_1 = 65.35, \qquad q_2 = 24.26, \qquad q_3 = 10.39$$

con conseguenti seggi

$$s_1 = 65, \qquad s_2 = 24, \qquad s_3 = 11.$$

∎

Infine esiste anche il *Paradosso del nuovo stato*. Se un nuovo distretto k viene aggiunto, il numero totale di seggi viene aumentato della quantità prevista in base alla popolazione del nuovo distretto e i seggi vengono ricalcolati. Si può ottenere un risultato diverso dalla semplice allocazione dei seggi in più al nuovo distretto. Ad esempio sia H il numero totale di seggi prima dell'introduzione del distretto k con popolazione p_k. Viene calcolato il valore s_k arrotondando la quota $p_k\, H/P$. Se q_j sono le vecchie quote e q'_j sono le nuove quote si ha

$$q_j = p_j \,\frac{H}{P} \qquad q'_j = p_j \,\frac{H + s_k}{P + p_k} = q_j \,\frac{1 + s_k/H}{1 + p_k/P} = q_j\, \gamma$$

Siccome $s_k/H = p_k/P$ solo nell'improbabile caso di $p_k\,H/P$ intero, si ha quasi sicuramente $\gamma \neq 1$. Quindi le quote dei distretti più grandi variano di più e l'ordine dei resti può variare. Anche se, a causa di un coefficiente γ quasi uguale ad 1, si può avere $\lfloor q_j \rfloor = \lfloor q'_j \rfloor$, l'ordine alterato dei resti nella successiva allocazione può causare uno spostamento di un seggio fra due distretti. Questo inconveniente fu scoperto nel 1907 con l'ingresso dell'Oklahoma negli Stati Uniti, da cui anche il nome di *paradosso dell'Oklahoma*.

4 Metodi basati sui divisori

Il metodo dei resti più alti minimizza gli scarti assoluti dalle quote. Si può tuttavia ritenere che una misura più giusta consista nel misurare la deviazione relativa rispetto alle quote. Come risulta da (1) la deviazione assoluta corrisponde ad un errore in termini di rappresentatività nel distretto rispetto a quella nazionale pesato però in base alla popolazione, ovvero distretti più grandi sono più favoriti. Volendo invece mantenere tutti i distretti sullo stesso piano di importanza sembra più equo usare la deviazione relativa dalla quota che, come risulta da (2) corrisponde direttamente all'errore di rappresentatività.

A favore dell'idea di usare la deviazione relativa citiamo la seguente osservazione di Balinski e Young ([7] p. 129): 'it can be argued that staying within the quota is not really compatible with the idea of proportionality at all, since it allows a much greater variance in the per capita representation of smaller states than it does for larger states'.

Possiamo allora immaginare di allocare i seggi uno alla volta ai vari distretti, scegliendo ogni volta di allocare il seggio a quel distretto la cui rappresentatività sia, in quel momento, la più bassa. Inizialmente tutti i distretti hanno 0 seggi e quindi una rappresentatività nulla. Necessariamente riceveranno un seggio a testa. A questo punto ogni distretto ha una rappresentatività uguale a $1/q_j$. Allora il successivo seggio andrà assegnato al distretto con la popolazione più alta. I rimanenti seggi verranno assegnati di volta in volta al distretto con minor valore s_j/q_j.

Si notino i seguenti fatti: una volta allocati tutti i seggi non può avvenire che $s_j/q_j \leqslant 1$, per ogni j, con almeno una diseguaglianza stretta, né che $s_j/q_j \geqslant 1$, con almeno una diseguaglianza stretta, perché ciò implicherebbe rispettivamente $H < H$ e $H > H$. Quindi per qualche distretto si ha $s_j/q_j \leqslant 1$, e quindi tali distretti sono sotto rappresentati, e per i rimanenti distretti si ha $s_j/q_j \geqslant 1$ e quindi quelli con diseguaglianza stretta risultano sovra rappresentati.

Inoltre, non appena un distretto riceve un seggio per cui si abbia $s_j/q_j \geqslant 1$, tale distretto non potrà più ricevere seggi, perché per poterne ricevere, tutti gli altri distretti dovrebbero avere un rapporto s_j/q_j maggiore, ma questa è una possibilità che abbiamo appena escluso.

Nel passaggio da s_j/q_j a $(s_j + 1)/q_j$ l'aumento più grande avviene per i distretti più piccoli. Quindi questi distretti hanno una maggior probabilità di oltrepassare la soglia di 1 e risultano favoriti dal metodo.

Il metodo delineato prende il nome di *metodo di Adams* ed è anche detto *metodo dei più piccoli divisori*.

Esempio 5. Ad esempio con i seguenti dati

$$p_1 = 51, \qquad p_2 = 31, \qquad p_3 = 10, \qquad H = 8$$

si ottengono le quote

$$q_1 = 4.43478, \qquad q_2 = 2.69565, \qquad q_3 = 0.869565$$

Dopo avere allocato i primi tre seggi ai distretti, le successive allocazioni sono

s_1	s_2	s_3	$\frac{s_1}{q_1}$	$\frac{s_2}{q_2}$	$\frac{s_3}{q_3}$
1	1	1	0.225	0.371	1.150
2	1	1	0.451	0.371	1.150
2	2	1	0.451	0.742	1.150
3	2	1	0.676	0.742	1.150
4	2	1	0.902	0.742	1.150
4	3	1	0.902	1.113	1.150

Come previsto, il distretto più grande è sotto rappresentato, mentre gli altri due sono sovra rappresentati.

∎

Dal punto di vista della programmazione matematica il metodo trova la soluzione ottima al seguente problema

$$\begin{aligned} \max \ \min_j \frac{s_j}{q_j} \\ \sum_j s_j = H \\ s_j \geqslant 0, \text{ intero} \end{aligned}$$

equivalente a

$$\begin{aligned} \min \ \max_j (1 - \frac{s_j}{q_j}) \\ \sum_j s_j = H \\ s_j \geqslant 0, \text{ intero} \end{aligned}$$

dove $(1 - s_j/q_j)$ è l'errore per difetto rispetto all'ideale di rapporto uguale ad 1. L'errore per eccesso $(s_j/q_j - 1)$ non viene invece valutato. Dalle considerazioni fatte si vede che non può superare $\max_j(1/q_j)$.

Un altro metodo, detto *metodo di Jefferson* o *metodo di D'Hondt* o anche *metodo dei più grandi divisori*, prende in esame il costo di ogni seggio p_j/s_j modificato però aggiungendo un seggio ai seggi s_j effettivamente allocati, ovvero si prendono in esame i rapporti $p_j/(s_j + 1)$ e si assegnano i seggi, uno alla volta, al distretto con il rapporto $p_j/(s_j + 1)$ più elevato. Il metodo è equivalente ad allocare i seggi uno alla volta al distretto con il più piccolo rapporto $(s_j + 1)/q_j$. Anche in questo caso aggiungere un seggio comporta un aumento del rapporto pari a $1/q_j$ e quindi tanto più grande quanto più piccolo è il distretto, però la scelta del distretto a cui aggiungere un seggio non si basa sul distretto meno rappresentato, ma sul distretto meno rappresentato *se avesse un seggio in più*. È abbastanza evidente che questo seggio in più virtuale altera la situazione a sfavore dei distretti più piccoli. Ecco cosa si ottiene con i dati dell'Esempio 5.

Esempio 6.

s_1	s_2	s_3	$\dfrac{s_1}{q_1}$	$\dfrac{s_2}{q_2}$	$\dfrac{s_3}{q_3}$	$\dfrac{s_1+1}{q_1}$	$\dfrac{s_2+1}{q_2}$	$\dfrac{s_3+1}{q_3}$
0	0	0	0	0	0	0.225	0.371	1.150
1	0	0	0.225	0	0	0.451	0.371	1.150
1	1	0	0.225	0.371	0	0.451	0.742	1.150
2	1	0	0.451	0.371	0	0.676	0.742	1.150
3	1	0	0.676	0.371	0	0.902	0.742	1.150
3	2	0	0.676	0.742	0	0.902	1.113	1.150
4	2	0	0.902	0.742	0	1.127	1.113	1.150
5	2	0	0.902	0.742	0	1.127	1.484	1.150
5	3	0	1.127	1.113	0	1.353	1.484	1.150

∎

A dire il vero il metodo di Jefferson, come è stato usato negli Stati Uniti, è leggermente diverso in quanto prevede un'allocazione iniziale di un seggio ad ogni distretto, per soddisfare il requisito della costituzione degli Stati Uniti di allocare almeno un seggio ad ogni stato. Con questo requisito si ottiene $s_1 = 4$, $s_2 = 3$, $s_3 = 1$.

Dal punto di vista della programmazione matematica il metodo di Jefferson trova la soluzione ottima al seguente problema

$$\begin{aligned} \min \ \max_j \frac{q_j}{s_j+1} \\ \sum_j s_j = H \\ s_j \geqslant 0, \text{ intero} \end{aligned}$$

L'obiettivo è equivalente a

$$\max_j \left\{ 1 - \frac{s_j}{q_j} - \frac{1}{q_j} \right\}$$

L'errore rispetto alla rappresentanza ideale viene diminuito del termine $1/q_j$ che è inversamente proporzionale alla popolazione. Quindi distretti piccoli vengono misurati con un errore minore e quindi penalizzati.

I due metodi delineati rientrano nella più ampia categoria dei *metodi dei divisori*. Un particolare metodo dei divisori è caratterizzato da una speciale funzione detta *segnaposto*

$$\delta(z) : Z \to \mathbb{R}, \qquad \delta(z) : z \mapsto [z, z+1]$$

che assegna ad ogni intero z un reale compreso fra z e $z+1$. Il significato della funzione $\delta(z)$ è di specificare come arrotondare un reale compreso fra z e $z+1$. In particolare, se $z \leqslant a < z+1$, l'arrotondamento, denotato come $[\![a]\!]$, si effettua nel seguente modo

$$[\![a]\!] = \begin{cases} \lfloor a \rfloor & \text{se } a \leqslant \delta(z) \\ \lceil a \rceil & \text{se } \delta(z) < a < z+1 \end{cases}$$

La definizione data implica $[\![a]\!] = \lfloor a \rfloor$ se $a = \delta(z)$ mentre, per simmetria, potrebbe aver senso anche $[\![a]\!] = \lceil a \rceil$ se $a = \delta(z)$. Questa arbitrarietà nell'arrotondamento viene introdotta e sfruttata, con opportune modificazioni delle quote, nel metodo Tie and Transfer per l'allocazione biproporzionale (Capitolo 11). Con quote fisse la probabilità che $a = \delta(z)$ è trascurabile.

I metodi dei divisori operano un aggiustamento del quoziente tramite un coefficiente λ in modo che i seggi calcolati da

$$s_j = [\![\lambda\, q_j]\!] \tag{5}$$

diano somma H. Le funzioni $\delta(z)$ più comuni sono:

$\delta(z) = z$	arrotondamento per eccesso
$\delta(z) = \dfrac{2}{\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1}}$	arrotondamento in base alla media armonica
$\delta(z) = \sqrt{z\,(z+1)}$	arrotondamento in base alla media geometrica
$\delta(z) = z + 0.5$	arrotondamento in base alla media aritmetica
$\delta(z) = z + 1$	arrotondamento per difetto

I valori delle funzioni sono crescenti secondo l'ordine dell'elenco. Le tre funzioni centrali producono valori che tendono ad essere uguali per valori grandi di z. Ad esempio per $z = 50$ si hanno nell'ordine i valori 50.495, 50.4975 e 50.5. Per valori bassi di z le differenze sono invece rilevanti. Per $z = 1$ i tre valori sono $4/3 = 1.333$, $\sqrt{2} = 1.4142$, 1.5. Se $z = 0$ i valori sono 0, 0, e 0.5. Quindi arrotondando secondo la media armonica o secondo la media geometrica quote inferiori a uno si ha comunque un arrotondamento per eccesso e questo implica che un seggio verrà sempre allocato ad ogni distretto non importa quanto piccolo.

La funzione $\delta(z)$ risponde alla domanda di quanto errore si commette arrotondando un reale x a $\lfloor x \rfloor$ oppure a $\lceil x \rceil$. Si supponga x uniformemente distribuita fra z e $z+1$. Allora l'errore assoluto medio si misura come

$$\int_z^{\delta} (x - z)\, dx + \int_{\delta}^{z+1} (z + 1 - x)\, dx$$

Derivando rispetto a δ e ponendo uguale a zero la derivata si ottiene

$$(\delta - z) - (z + 1 - \delta) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \delta = z + 0.5$$

Si ottiene lo stesso risultato se si considera l'errore relativo medio

$$\int_z^{\delta} \frac{x - z}{x}\, dx + \int_{\delta}^{z+1} \frac{z + 1 - x}{x}\, dx$$

Se si misura invece l'errore relativo rispetto al valore finale arrotondato piuttosto che al valore iniziale, l'errore è

$$\int_z^{\delta} \frac{x - z}{z}\, dx + \int_{\delta}^{z+1} \frac{z + 1 - x}{z + 1}\, dx$$

Derivando rispetto a δ e ponendo uguale a zero la derivata si ottiene

$$\frac{\delta - z}{z} - \frac{z + 1 - \delta}{z + 1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \delta = \frac{2}{\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1}} = \frac{2\,z\,(z+1)}{2\,z + 1}$$

Se si misura l'errore direttamente come rapporto fra i due valori, ponendo a numeratore sempre il più grande dei due valori (analogo del valore assoluto in caso di differenza), l'errore è

$$\int_z^{\delta} \frac{x}{z}\, dx + \int_{\delta}^{z+1} \frac{z + 1}{x}\, dx$$

Si noti che in questo caso l'errore è invariante rispetto alla grandezza di x. Derivando rispetto a δ e ponendo uguale a zero la derivata si ottiene

$$\frac{\delta}{z} = \frac{z+1}{\delta} \qquad \Longrightarrow \qquad \delta = \sqrt{z\,(z+1)}$$

Allocare i seggi tramite (5) è equivalente ad allocare i seggi uno ad uno al valore minimo corrente di

$$\frac{\delta(s_j)}{q_j}$$

Infatti sia

$$\lambda = \min_j \frac{\delta(s_j)}{q_j}$$

Per come vengono allocati i seggi si deve anche avere, per ogni j

$$\frac{\delta(s_j - 1)}{q_j} \leqslant \lambda$$

e, se i minimi $\min_j \delta(s_j)/q_j$ sono unici, si ha

$$\frac{\delta(s_j - 1)}{q_j} < \lambda$$

Questo caso avviene con elevata probabilità e quindi assumiamo che la diseguaglianza sia stretta. Allora

$$\frac{\delta(s_j - 1)}{q_j} < \lambda \leqslant \frac{\delta(s_j)}{q_j}$$

cioè

$$\delta(s_j - 1) < \lambda\, q_j \leqslant \delta(s_j)$$

che è esattamente la condizione di ottenere s_j seggi arrotondando $\lambda\, q_j$ quando $\lambda\, q_j$ non sia intero.

Il metodo di Jefferson è quindi un metodo dei divisori che usa l'arrotondamento per difetto $\delta(z) = z + 1$, mentre il metodo di Adams usa l'arrotondamento per eccesso $\delta(z) = z$.

Gli altri metodi vengono chiamati: *metodo di Dean* l'arrotondamento secondo la media armonica (proposto nel 1832 da James Dean professore di astronomia e matematica al Dartmouth college), *metodo di Huntington-Hill* o *delle proporzioni uguali* l'arrotondamento secondo la media geometrica (dai due proponenti nel 1921), *metodo di Webster* l'arrotondamento secondo la media aritmetica (proposto nel 1832 dal senatore Daniel Webster).

Si noti che, assegnati seggi arbitrari, si può verificare se sono seggi ottenibili da un metodo dei divisori se

$$\max_j \frac{\delta(s_j - 1)}{q_j} < \min_j \frac{\delta(s_j)}{q_j} \tag{6}$$

e in questo caso qualsiasi λ all'interno dell'intervallo aperto dato da (6) è un valido divisore.

Esempio 7. Si riconsiderino i dati dell'Esempio 5

$$p_1 = 51, \qquad p_2 = 31, \qquad p_3 = 10, \qquad H = 8$$

con le quote naturali

$$q_1 = 4.43478, \qquad q_2 = 2.69565, \qquad q_3 = 0.869565$$

Se si usa il metodo di Jefferson le quote vanno arrotondate per difetto ottenendo

$$s_1 = 4, \qquad s_2 = 2, \qquad s_3 = 0$$

la cui somma però non è 8. In questo caso si ottengono H seggi per dei valori λ nell'intervallo $1.12745 \leqslant \lambda < 1.15$ come si vede dalla seguente tabella.

λ	$\lambda\, q_1$	$\lambda\, q_2$	$\lambda\, q_3$
1.12745	5.00	3.03921	0.980391
1.13196	5.02	3.05137	0.984313
1.13647	5.04	3.06353	0.988235
1.14098	5.06	3.07569	0.992157
1.14549	5.08	3.08784	0.996078
1.15000	5.10	3.10000	1.000000

Usando il metodo di Adams le quote vanno arrotondate per eccesso ottenendo

$$s_1 = 5, \qquad s_2 = 3, \qquad s_3 = 1$$

con somma 9. In questo caso si ottengono H seggi per dei valori λ nell'intervallo $0.741935 < \lambda \leqslant 0.901961$ come si vede dalla seguente tabella.

λ	$\lambda\, q_1$	$\lambda\, q_2$	$\lambda\, q_3$
0.741935	3.29032	2.00000	0.645161
0.773941	3.43226	2.08627	0.672992
0.805946	3.57419	2.17255	0.700822
0.837951	3.71613	2.25882	0.728653
0.869956	3.85806	2.34510	0.756483
0.901961	4.00000	2.43137	0.784314

∎

I metodi di Jefferson e di Adams sono metodi estremi, come si vede dalle rispettive funzioni $\delta(z)$ e non sono generalmente usati. Più elevato è $\delta(z)$ più viene favorito un distretto grande. Ecco un esempio per dati generati casualmente ($H = 100$) dove nell'ultima riga viene riportato anche il risultato per il metodo dei resti più alti per confronto (A=metodi di Adams, D=metodo di Dean, H=metodo di Huntington-Hill, W=metodo di Webster, J=metodo di Jefferson, R=metodo dei resti più alti)

p	29	30	39	51	54	62	66	86	92	107	114	119	128	131	148	149	161	164	198	200
A	2	2	2	3	3	3	3	4	4	5	5	6	6	6	7	7	7	7	9	9
D	2	2	2	2	3	3	3	4	4	5	5	6	6	6	7	7	7	8	9	9
H	1	2	2	2	3	3	3	4	4	5	5	6	6	6	7	7	8	8	9	9
W	1	1	2	2	3	3	3	4	4	5	5	6	6	6	7	7	8	8	9	10
J	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	6	7	7	8	8	10	10
R	1	2	2	2	3	3	3	4	4	5	5	6	6	6	7	7	8	8	9	9

Si noti la coincidenza, in questo caso, del metodo dei resti più alti con il metodo di Huntington-Hill.

I metodi dei divisori possono violare le quote. Questo fatto non deve meravigliare. I metodi dei divisori minimizzano gli errori relativi e quindi l'oscillazione dei seggi allocati rispetto alle quote nei distretti più grandi può superare l'intervallo di un intero. Si considerino i seguenti due esempi.

Esempio 8. Sia $H = 50$ (i valori di q_j sono arrotondati al centesimo)

		p	23	38	60	126	128	348
		q	1.59	2.63	4.15	8.71	8.85	24.07
	A	s	2	3	4	9	9	23
Caso 1	D	s	2	3	4	9	9	23
	H	s	2	3	4	9	9	23
	W	s	2	3	4	9	9	23
	J	s	1	2	4	9	9	25

		p	77	78	125	191	263	449
		q	3.25	3.30	5.28	8.07	11.12	18.98
	A	s	4	4	5	8	11	18
Caso 2	D	s	3	3	5	8	11	20
	H	s	3	3	5	8	11	20
	W	s	3	3	5	8	11	20
	J	s	3	3	5	8	11	20

∎

Nel primo caso i metodi di Adams, Dean, Huntintgon-Hill e Webster producono una violazione delle quote per difetto, mentre nel secondo caso i metodi di Dean, Huntintgon-Hill, Webster e Jefferson producono una violazione delle quote per eccesso.

Il metodo di Jefferson non viola mai le quote per difetto mentre il metodo di Adams non le viola mai per eccesso. Generando casualmente istanze con valori di popolazione distribuiti uniformemente fra 10 e 200, 6 distretti e $H = 50$ si vede che mediamente nel 4% dei casi i metodi di Adams e Jefferson violano le quote mentre gli altri metodi producono una violazione in meno dello 0.1% dei casi.

I metodi dei divisori in compenso non violano la Monotonia incrementale. Infatti sia

$$\frac{q'_i}{q_i} > \frac{q'_j}{q_j} \quad \wedge \quad s'_j > s_j, \quad \wedge \quad s'_i < s_i$$

Il primo termine si può scrivere come $q'_i\, q_j > q'_j\, q_i$. Si noti che $s'_j > s_j$ implica $\lambda'\, q'_j > \lambda\, q_j$ e $s'_i < s_i$ implica $\lambda'\, q'_i < \lambda\, q_i$. Moltiplicando le due diseguaglianze si ottiene $q_i\, q'_j > q_j\, q'_i$ che contraddice la precedente diseguaglianza. È interessante notare che l'implicazione $s'_j > s_j \implies \lambda'\, q'_j > \lambda\, q_j$ vale per i metodi ai divisori in quanto l'arrotondamento all'intero non dipende dagli altri distretti, mentre l'implicazione $s'_j > s_j \implies q'_j > q_j$ non vale per il metodo dei resti più alti. Proprio perché l'arrotondamento dipende dagli altri resti può accadere (si rivedano gli esempi precedenti) che l'arrotondamento avvenga in un primo caso verso l'alto e in un secondo verso il basso anche se la quota è aumentata.

È interessante notare una uguaglianza formale fra il metodo dei resti più alti e i metodi ai divisori. Si fissi una funzione d'arrotondamento $\delta(z)$. Nei metodi dei divisori le quote vengono alterate di un fattore *moltiplicativo* λ in modo che i seggi ottenuti arrotondando i valori $\lambda\, q_{ij}$ diano somma H. Il metodo dei resti più alti può essere ridefinito pensando di alterare le quote di un fattore *additivo* α in modo che i seggi ottenuti arrotondando i valori $(q_{ij} + \alpha)^+$ diano somma H. Si è visto che la scelta della funzione $\delta(z)$ comporta variazioni notevoli nell'allocazione dei seggi per i metodi dei divisori. Se la funzione $\delta(z) - z$ è costante (come nei metodi di Adams, Webster e Jefferson) allora l'allocazione dei seggi con il metodo dei resti più alti (rivisto come descritto) è invariante, altrimenti vengono favoriti i distretti piccoli. Comunque va detto che l'uso della funzione $\delta(z)$ è strettamente connesso con i metodi dei divisori e non è mai stato pensato per il metodi dei resti più alti.

Il nome di Metodi dei divisori deriva da un modo apparentemente diverso di allocare i seggi, ma uguale nella sostanza. I Metodi dei divisori, come originariamente proposti, prevedono la definizione di una successione di divisori

$$d_1 < d_2 < \ldots < d_H$$

e la formazione della matrice p_j/d_k. Si prendono gli H più alti valori della matrice e corrispondentemente si assegnano i seggi ai distretti a cui corrispondono questi valori. Considerando l'esempio precedente con divisori $d_k = k$ si ha

d_k	1	2	3	4	5	6	7	8
1	**51.00**	**25.50**	**17.00**	**12.75**	**10.20**	8.50	7.29	6.37
2	**31.00**	**15.50**	**10.33**	7.75	6.20	5.17	4.43	3.87
3	10.00	5.00	3.33	2.50	2.00	1.67	1.43	1.25

Gli 8 valori più grandi sono i primi 5 valori del primo distretto e i primi 3 del secondo distretto (in grassetto nella tabella). Quindi i seggi sono $s_1 = 5$, $s_2 = 3$, $s_3 = 0$. Si prendano ora i divisori $d_k = 2k-1$. Si ottiene la matrice

d_k	1	3	5	7	9	11	13	15
1	**51.00**	**17.00**	**10.20**	**7.29**	5.67	4.64	3.92	3.40
2	**31.00**	**10.33**	**6.20**	4.43	3.44	2.82	2.38	2.07
3	**10.00**	3.33	2.00	1.43	1.11	0.91	0.77	0.67

Questa volta gli 8 valori più grandi sono i primi 4 del primo distretto, i primi 3 del secondo e il primo del terzo, con un'allocazione di seggi $s_1 = 4$, $s_2 = 3$, $s_3 = 1$.

La relazione con i metodi precedentemente descritti e quest'ultimo è abbastanza evidente. Trovare gli H valori più grandi p_j/d_k è equivalente a trovare gli H valori più piccoli d_k/p_j a sua volta equivalente a trovare gli H valori più piccoli d_k/q_j. Si è visto che i metodi descritti precedentemente possono essere descritti come l'allocazione di un seggio alla volta al distretto con il valore più piccolo di $\delta(s_j)/q_j$. La differenza consiste nel fatto che i valori d_k/q_j sono valutati *dopo* aver allocato il seggio mentre i valori $\delta(s_j)/q_j$ sono valutati *prima* di allocare il seggio. Quindi c'è una relazione biunivoca

$$\frac{d_k}{q_j} \leftrightarrow \frac{\delta(k-1)}{q_j}$$

È chiaro a questo punto che il primo esempio si riferisce al metodo di Jefferson, in quanto $d_k = k = \delta(k-1)$, i.e., $\delta(k) = k + 1$. Nel secondo caso la relazione è leggermente più complicata, in quanto l'intervallo fra due successivi divisori supera l'unità. Tuttavia l'allocazione non cambia se si dividono i divisori per un fattore comune. Allora si ha

$$\frac{d_k}{2} = \frac{2k-1}{2} = \delta(k-1) \quad \Longrightarrow \quad \delta(k) = k + \frac{1}{2}$$

e quindi il secondo esempio si riferisce al metodo di Webster. Il *metodo belga* ha i seguenti divisori

$$d_k = 1 \,,\, 1.5 \,,\, 2 \,,\, 2.5 \,,\, 3 \,,\, 3.5 \,,\ldots \quad \Longrightarrow \quad d_k = \frac{k+1}{2}$$

Allora

$$2\, d_k = k+1 = \delta(k-1) \quad \Longrightarrow \quad \delta(k) = k+2$$

Nel Metodo Nohlem i divisori sono

$$d_k = 2 \,,\, 3 \,,\, 4 \ldots \quad \Longrightarrow \quad d_k = k+1$$

e quindi il metodo è uguale al Metodo belga.

Sia $f(s_i, q_i, s_j, q_j)$ una funzione che misura l'equità di un'allocazione, confrontando fra loro le rappresentatività di due distretti i e j. Se $s_i/q_i = s_j/q_j$ allora i due distretti sono equamente rappresentati. Se non si verifica l'eguaglianza allora lo scostamento può essere usato per misurare lo scarto dall'equità. La funzione $f(s_i, q_i, s_j, q_j)$ deve allora soddisfare il requisito che $f(s_i, q_i, s_j, q_j) = 0$ se $s_i/q_i = s_j/q_j$, $f(s_i, q_i, s_j, q_j) > 0$ se $s_i/q_i \neq s_j/q_j$ e inoltre deve essere monotona rispetto allo scarto $|s_i/q_i - s_j/q_j|$. Si definisce *stabile* un metodo di allocazione dei seggi se i seggi assegnati s soddisfano

$$f(s_i, q_i, s_j, q_j) \leqslant f(s_i+1, q_i, s_j-1, q_j) \qquad \text{e} \qquad f(s_i, q_i, s_j, q_j) \leqslant f(s_i-1, q_i, s_j+1, q_j)$$

per ogni coppia i, j. In altri termini uno scambio di seggi fra due distretti non migliora la misura di equità. Varie funzioni di equità possono essere definite. Ad esempio

$$\begin{aligned}
f_A(s_i, q_i, s_j, q_j) &= \max\left\{ s_j - s_i \frac{q_j}{q_i} \;;\; s_i - s_j \frac{q_i}{q_j} \right\} = \max\{q_j\,(r_j - r_i)\;;\; q_i\,(r_i - r_j)\} \\
f_D(s_i, q_i, s_j, q_j) &= |\frac{q_j}{s_j} - \frac{q_i}{s_i}| = |\frac{1}{r_j} - \frac{1}{r_i}| \\
f_H(s_i, q_i, s_j, q_j) &= \max\left\{ \frac{q_i\, s_j}{q_j\, s_i} - 1 \;;\; \frac{q_j\, s_i}{q_i\, s_j} - 1 \right\} = \max\left\{ \frac{r_j}{r_i} - 1 \;;\; \frac{r_i}{r_j} - 1 \right\} \\
f_W(s_i, q_i, s_j, q_j) &= |\frac{s_j}{q_j} - \frac{s_i}{q_i}| = |r_j - r_i| \\
f_J(s_i, q_i, s_j, q_j) &= \max\left\{ s_i \frac{q_j}{q_i} - s_j \;;\; s_j \frac{q_i}{q_j} - s_i \right\} = \max\{q_j\,(r_i - r_j)\;;\; q_i\,(r_j - r_i)\}
\end{aligned}$$

Si può dimostrare che ognuno dei metodi delineati è stabile rispetto ad una delle funzioni sopra elencate (A=Adams, D=Dean, H=Huntington-Hill, W=Webster, J=Jefferson).

Fra i tanti metodi proposti ce n'è uno che è un misto fra il metodo dei resti più grandi e il metodo di Adams. Il metodo, detto di Lowndes, dal suo proponente, assegna inizialmente i seggi $s_j = \lfloor q_j \rfloor$, quindi seguendo la prima fase del metodo dei resti più grandi. I seggi rimanenti però non vengono assegnati secondo i resti più alti $q_j - \lfloor q_j \rfloor$, ma secondo i più grandi costi $q_j/s_j = q_j/\lfloor q_j \rfloor$. Siccome

$$\frac{q_j - \lfloor q_j \rfloor}{\lfloor q_j \rfloor} = \frac{q_j}{\lfloor q_j \rfloor} - 1$$

si vede che l'ordine indotto dai resti più alti viene alterato a favore dei distretti più piccoli. Tuttavia, questo non implica che il metodo favorisca necessariamente i distretti più piccoli. Ad esempio si è visto che il metodo di Adams può violare le quote per difetto nei distretti più grandi. Il metodo di Lowndes non viola le quote e quindi in questi casi favorisce i distretti grandi. Questo metodo non è mai stato impiegato.

5 Seggi della Camera dei Rappresentanti degli Stati Uniti

La storia, abbastanza controversa, delle varie decisioni che si sono susseguite in 200 anni per l'assegnazione dei seggi nella Camera dei Rappresentanti degli Stati Uniti riflette bene tutte le problematiche connesse con il problema. L'articolo 1, Sezione 2 della Costituzione degli Stati Uniti recita:

> *Representatives and direct Taxes shall be apportioned among the several States which may be included within this Union, according to their respective Numbers, which shall be determined by adding to the whole Number of free Persons, including those bound to Service for a Term of Years, and excluding Indians not taxed, three fifths of all other Persons. The actual Enumeration shall be made within three Years after the first Meeting of the Congress of the United States, and within every subsequent Term of ten Years in such Manner as they shall by Law direct. The Number of Representatives shall not exceed one for every thirty Thousand, but each state shall have at Least one Representative; and until such enumerations shall be made ...*

L'articolo prosegue elencando direttamente i numeri dei rappresentanti per ognuno dei 13 stati iniziali, per un totale di 65 rappresentanti, validi fino al primo censimento che si tenne nel 1790, tre anni dopo l'approvazione della Costituzione il 17/9/1787. Nel 1791 il Congresso approvò di portare a 120 il numero dei rappresentanti e di allocare i seggi con il metodo proposto da Alexander Hamilton che battè l'altra proposta di Thomas Jefferson. Tuttavia il presidente George Washington fece uso, per la prima volta nella storia degli Stati Uniti del potere di veto. Il Congresso quindi dovette approvare una nuova legge che prevedeva 105 seggi da allocare con il metodo di Jefferson.

Il motivo principale del veto risiedeva nel numero dei seggi che, calcolato in modo da avere esattamente 30.000 cittadini per seggio, necessariamente violava il requisito costituzionale in qualche stato (nella fattispecie in 8 stati) perché come si è visto, nessun metodo può evitare di avere alcuni stati sotto rappresentati e altri sovra rappresentati. Questa tuttavia era l'interpretazione di Jefferson e Randolph, mentre secondo Hamilton e Knox il requisito costituzionale valeva per l'intera nazione e non doveva essere inteso stato per stato.

Meno evidente era il veto per incostituzionalità nei confronti del metodo di Hamilton. Secondo Jefferson il dettato costituzionale implicava l'uso di divisori e Hamilton non era d'accordo. Questa non fu che una fra le molte dispute fra i due uomini politici.

Alla fine Washington prese le parti di Jefferson e pose il veto. Ci si può chiedere perché alla fine Washington abbia preso tale decisione, al di là delle non convincenti ragioni ufficiali. È da escludere che fosse a conoscenza del paradosso dell'Alabama (anche se l'Alabama allora non era ancora uno degli stati dell'Unione, comunque Washington avrebbe potuto conoscere il problema). Si può congetturare che sia Washington che Jefferson, provenendo entrambi dalla Virginia, stato molto popoloso, preferissero questo metodo che favoriva il loro stato. In ogni caso non ci sono evidenze a favore di questa congettura.

Come detto, la rappresentatività non doveva superare il valore 1/30.000. In ogni caso la rappresentatività è diminuita considerevolmente negli anni, dato che la popolazione totale è aumentata più rapidamente del numero di seggi. Il numero di seggi è stabile al valore 435 dal 1910. A tale valore corrispondeva nel 1910 un costo di 210.328 cittadini per seggio, mentre il dato del 2010 vede un costo di 710.767 cittadini per seggio (si veda al sito [31]).

Siccome era diventato abbastanza evidente che il metodo di Jefferson favoriva gli stati più grandi, varie proposte di cambiamento furono presentate. Nel 1822 William Lowndes propose il suo metodo ma la proposta fu rigettata. Nel 1832 John Quincy Adams propose il metodo che porta il uso nome e successivamente Daniel Webster propose il suo metodo. Entrambe le proposte furono rigettate, anche per l'ovvio motivo che la Camera era rappresentata soprattutto dagli stati più grandi. Il metodo di Jefferson fu mantenuto con un aumento dei seggi a 240.

Però nel 1842 il metodo di Jefferson fu alla fine abbandonato in favore del metodo di Webster con un abbassamento dei seggi a 223, ma già nel 1852 il metodo di Webster fu abbandonato a sua volta in favore del metodo di Hamilton. Il proponente fu Samuel Vinton, per cui il metodo di Hamilton è anche noto come metodo di Vinton. Il numero dei seggi passò a 234 perché con tale dato il metodo di Hamilton e quello di Webster producevano lo stesso risultato.

Nel 1872 il numero di seggi fu innalzato a 283 in modo da far coincidere i due metodi, però furono aggiunti altri 9 seggi e l'allocazione risultante, decisa dopo una lunga battaglia politica, non coincideva con nessuno dei due metodi. La faccenda divenne molto critica nel 1876 quando si trattò di eleggere il presidente. Hayes vinse con 185 voti contro i 184 del suo rivale Tilden. Se l'allocazione fosse stata quella corretta Hayes non avrebbe vinto.

Nel 1880 emerse il paradosso dell'Alabama e nel 1882, per evitare il malfunzionamento del metodo di Hamilton, i seggi furono aumentati a 325, in modo nuovamente da avere la stessa allocazione sia con il metodo di Hamilton che con quello di Webster. Nel 1890 i seggi furono aumentati a 356 sempre avendo in mente di ottenere un accordo fra i due metodi. È degno di nota il fatto che nella decisione di quanti seggi adottare prevalesse il criterio dell'equità (se due metodi diversi danno lo stesso risultato questo è un segno di maggiore equità) anziché un criterio di opportunità 'politica'.

Nel 1901 l'Ufficio del Censo effettuò un calcolo preventivo per tutti i valori di H da 350 a 400. Il paradosso dell'Alabama emerse nuovamente, stavolta coinvolgendo il Maine e il Colorado. In particolare per il valore $H = 357$ il Colorado avrebbe avuto 2 seggi mentre per tutti gli altri valori avrebbe avuto 3 seggi. Curiosamente il presidente del Comitato per l'allocazione dei seggi propose al Congresso proprio il valore $H = 357$ causando la reazione violenta del Congresso che naturalmente rigettò la proposta e abolì il metodo di Hamilton adottando invece quello di Webster con un valore $H = 386$.

Anche se ormai si era adottato il metodo di Webster, tuttavia si facevano ugualmente i calcoli con il metodo di Hamilton per confrontare i risultati e così nel 1907 emerse il paradosso del nuovo stato, quando l'Oklahoma si aggiunse all'Unione. A causa di questo fatto il metodo di Hamilton fu definitivamente archiviato e nel 1910 fu riaffermato il metodo di Webster innalzando ancora, per l'ultima volta, il numero di seggi a 433, più due seggi addizionali da allocare all'Arizona e al New Mexico nel momento in cui fossero entrati nell'Unione.

Negli anni successivi al 1920 si cominciò a studiare il problema di modificare il metodo di Webster in modo da avere una ancora maggiore equità. Joseph Hill dell'Ufficio del Censo propose un metodo che fu poi perfezionato da un suo compagno di scuola, il matematico Edward Huntington [12]. Tale metodo fu chiamato Metodo delle Proporzioni Uguali da Huntington, ma è ovviamente noto anche come metodo di Huntington-Hill.

Si arrivò così al 1929 quando si decise di affidare il problema all'Accademia Nazionale delle Scienze, che diede l'incarico ad un comitato di matematici formato da G.A. Bliss, E.W. Brown, L.P. Eisenhart e R.

Pearl di effettuare uno studio oggettivo del problema. Il risultato dello studio fu di adottare il metodo di Huntington-Hill. Stessa raccomandazione fu data da un altro autorevole gruppo di matematici nel 1949, composto da Harold Marston Morse, John Von Neumann e lo stesso Luther Eisenhart.

Finalmente nel 1941 il Congresso adottò il metodo di Huntington-Hill fissando il numero dei seggi a 435. Il metodo è tuttora in vigore. Ci sono state nel 1990 e nel 1992 delle cause intentate da alcuni stati per cambiare il sistema, a loro favore ovviamente, ma la Corte Suprema rigettò le istanze in entrambi i casi.

Il giudice Stevens della Corte Suprema così concludeva la sua sentenza il 31/3/1992: "The decision to adopt the method of equal proportions was made by Congress after decades of experience, experimentation, and debate about the substance of the constitutional requirement. Independent scholars supported both the basic decision to adopt a regular procedure to be followed after each census, and the particular decision to use the method of equal proportions. For a half century the results of that method have been accepted by the States and the Nation. That history supports our conclusion that Congress had ample power to enact the statutory procedure in 1941 and to apply the method of equal proportions after the 1990 census."

6 Seggi del Parlamento Europeo

Finora il problema dell'allocazione dei seggi ai distretti à stato affrontato nell'idea che le quote naturali potrebbero costituire l'ideale allocazione se solo fosse possibile allocare seggi frazionari. In altri termini è stato tacitamente invocato un postulato di pura proporzionalità. Tuttavia altre scelte possono essere fatte in base ad altri criteri. Il caso più notevole è quello del parlamento europeo, in cui il numero di seggi da allocare agli stati dell'Unione deve rispettare i seguenti requisiti [14]:

1. nessuno stato deve ricevere meno seggi di uno stato più piccolo;
2. nessuno stato deve ricevere meno seggi di un prestabilito limite inferiore;
3. nessuno stato deve ricevere più seggi di un prestabilito limite superiore;
4. i seggi devono soddisfare il principio di proporzionalità decrescente.

Proporzionalità decrescente significa che il rapporto popolazione/seggi deve essere una funzione crescente della popolazione. In altre parole, il costo di un seggio deve aumentare con la popolazione. Ovviamente si tratta di un criterio che esplicitamente favorisce la rappresentanza degli stati piccoli. I dati attuali (2012) del parlamento europeo sono $H = 751$, limite inferiore eguale a $L = 6$ e limite superiore uguale a $U = 96$.

Le quattro regole elencate pongono qualche problema su quale metodo adottare per calcolare i seggi. Un comitato, nominato proprio per risolvere il problema, ha proposto un particolare metodo dei divisori [10]. La proposta prevede di allocare inizialmente ad ogni stato i 6 seggi del limite inferiore e poi allocare i rimanenti tramite un metodo dei divisori, eventualmente bloccando l'allocazione se il limite superiore di 96 seggi dovesse essere raggiunto.

Supponiamo che gli stati siano ordinati come $p_1 > p_2 > \ldots > p_m$. Allora i vincoli imposti corrispondono a

$$s_1 \geqslant s_2 \geqslant \ldots \geqslant s_m \tag{7}$$

$$\frac{p_1}{s_1} > \frac{p_2}{s_2} > \ldots > \frac{p_m}{s_m} \tag{8}$$

$$s_1 \leqslant U, \qquad s_m \geqslant L \tag{9}$$

$$\sum_i s_i = H \tag{10}$$

I vincoli (7) e (8) assieme restringono considerevolmente l'insieme delle soluzioni ammissibili. Ad esempio se consideriamo solamente due variabili s_1 e s_2, i valori ammissibili sono quelli inclusi fra le rette $s_2 = s_1$ and $s_2 = (p_2/p_1)\, s_1$. Se p_2 è quasi uguale a p_1, si tratta di un cono molto stretto che potrebbe non includere punti interi che soddisfino anche (10). Infatti in [10] si riporta un controesempio semplicemente estraendo cinque stati europei con popolazioni quasi uguali e con un numero di seggi H per cui non esiste soluzione ammissibile.

In [27] si suggerisce di usare la programmazione lineare intera per risolvere il problema misurando la deviazione in termini assoluti da quote assegnate, non necessariamente quelle naturali. Un primo modello può essere il seguente che minimizza la somma delle deviazioni assolute dalle quote.

$$\begin{aligned}
\min\ & \sum_{i=1}^{m} w_i \\
& w_i \geqslant q_i - s_i && i = 1, \ldots, m \\
& w_i \geqslant s_i - q_i && i = 1, \ldots, m \\
& s_i \geqslant s_{i+1} && i = 1, \ldots, m-1 \\
& p_{i+1}\, s_i \leqslant p_i\, s_{i+1} && i = 1, \ldots, m-1 \\
& \sum_{i=1}^{m} s_i = H \\
& s_1 \leqslant U, \quad s_m \geqslant L \\
& s_i \text{ intero} && i = 1, \ldots, m
\end{aligned} \tag{11}$$

Questo modello può essere ulteriormente raffinato in modo da garantire l'unicità della soluzione. Per i dettagli si veda ancora [27].

L'aspetto interessante del problema è che, in generale, si possono definire delle nuove quote $\tilde{q}$ tenendo conto degli speciali requisiti, cioè

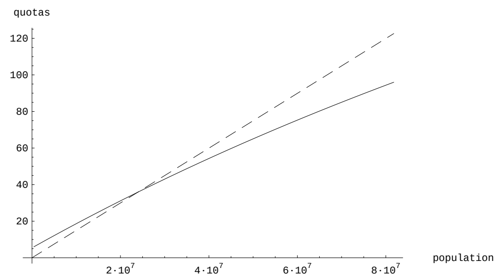
$$\tilde{q}_1 > \tilde{q}_2 > \ldots > \tilde{q}_n \tag{12}$$

$$\frac{p_1}{\tilde{q}_1} > \frac{p_2}{\tilde{q}_2} > \ldots > \frac{p_n}{\tilde{q}_n} \tag{13}$$

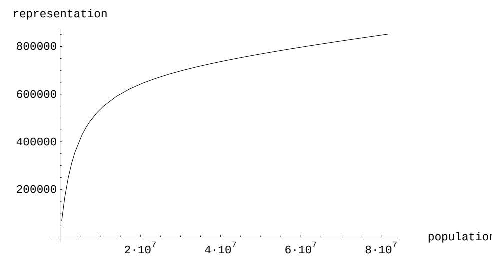
$$\tilde{q}_1 = M, \qquad \tilde{q}_n = m \tag{14}$$

$$\sum_i \tilde{q}_i = H \tag{15}$$

L'idea è di definire $\tilde{q}$ come una funzione delle quote naturali q in modo da soddisfare sia i tre vincoli d'uguaglianza (14) e (15) ed anche le diseguaglianze (12) e (13). Il criterio di semplicità richiederebbe



Quote naturali e proiettive



Costo del seggio

Figura 2:

l'uso di funzioni affini ma ciò non è possibile in questo caso perché le funzioni affini hanno due gradi di libertà mentre sono presenti tre vincoli d'uguaglianza. Quindi si può pensare di usare funzioni proiettive, cioè

$$\tilde{q}(q) = \frac{\alpha\, q + \beta}{\gamma\, q + 1}$$

così da mappare q_i in una *quota proiettiva* $\tilde{q}_i = \tilde{q}(q_i)$. I valori di α, β e γ si calcolano imponendo i tre vincoli d'uguaglianza. Per i dati del parlamento europeo si ottiene

$$\alpha = 0.91458, \qquad \beta = 5.44076, \qquad \gamma = 0.00183231,$$

Nella Tabella 2 sono riportati per i 26 paesi dell'Unione Europea i dati di popolazione (p), le quote naturali (q), le quote proiettive ($\tilde{q}$), il rapporto $p/\tilde{q}$ per verificare la proporzionalità descrescente, i seggi calcolati risolvendo (11) con le quote naturali (s^1), risolvendo (11) con le quote proiettive (s^2), calcolati in [10] (s^3) e quelli attualmente (2012) in vigore (s^4).

	p	q	$\tilde{q}$	$p/\tilde{q}$	s^1	s^2	s^3	s^4
Germania	81 802 257	122.596	96.000	852 107.	96	96	96	99
Francia	64 714 074	96.987	79.937	809 563.	90	85	80	74
UK	62 008 048	92.931	77.275	802 431.	87	81	77	73
Italia	60 340 328	90.432	75.618	797 964.	85	79	76	73
Spagna	45 989 016	68.923	60.799	756 417.	66	62	61	54
Polonia	38 167 329	57.201	52.277	730 104.	55	52	52	51
Romania	21 462 186	32.165	32.918	651 983.	31	32	33	33
Paesi Bassi	16 574 989	24.841	26.934	615 399.	24	26	27	26
Grecia	11 305 118	16.943	20.306	556 738.	17	19	19	22
Belgio	10 839 905	16.246	19.712	549 915.	17	19	19	22
Portogallo	10 637 713	15.943	19.453	546 833.	17	18	19	22
R. Ceca	10 506 813	15.746	19.286	544 797.	17	18	19	22
Ungheria	10 014 324	15.008	18.654	536 842.	17	18	19	22
Svezia	9 340 682	13.999	17.788	525 125.	16	17	18	20
Austria	8 375 290	12.552	16.540	506 362.	15	16	17	19
Bulgaria	7 563 710	11.336	15.486	488 407.	14	15	16	18
Danimarca	5 534 738	8.295	12.832	431 322.	11	12	13	13
Slovacchia	5 424 925	8.130	12.688	427 579.	11	12	13	13
Finlandia	5 351 427	8.020	12.591	425 027.	11	12	13	13
Irlanda	4 467 854	6.696	11.425	391 075.	10	11	12	12
Lituania	3 329 039	4.989	9.913	335 820.	8	10	10	12
Lettonia	2 248 374	3.370	8.470	265 444.	6	8	8	9
Slovenia	2 046 976	3.068	8.200	249 619.	6	8	8	8
Estonia	1 340 127	2.008	7.251	184 821.	6	7	7	6
Cipro	803 147	1.204	6.527	123 046.	6	6	7	6
Lussemburgo	502 066	0.752	6.120	82 030.	6	6	6	6
Malta	412 970	0.619	6.000	68 828.	6	6	6	6

Tabella 2: Parlamento Europeo, p=popolazione, q=quote naturali, $\tilde{q}$=quote proiettive, s^1=seggi con quote naturali, s^2=seggi con quote proiettive, s^3=seggi calcolati con il compromesso di Cambridge, s^4=seggi atualmente in vigore

Allocazione dei seggi alle liste

Allocazione biproporzionale dei seggi

7 Definizioni e proprietà

Una caratteristica comune alle democrazie parlamentari è la presenza di una camera dei rappresentanti in cui i seggi non vengono solo divisi per distretti, ma anche, in seguito ai voti espressi, alle liste. In questi sistemi è prioritario il voto espresso ad una lista e la scelta dei rappresentanti è successiva ai voti assegnati alle liste. In alcuni sistemi i voti assegnati alle liste sono invece conseguenza dei seggi vinti dai candidati.

In questo capitolo ci occupiamo del problema in cui i seggi allocati ai distretti sono fissati, tipicamente prima delle elezioni, i seggi allocati alle liste su scala nazionale sono calcolati preliminarmente sulla base dei voti ricevuti su scala nazionale e successivamente bisogna allocare i seggi alle liste in ogni distretto. È evidente che questa suddivisione deve rispettare il numero totale di seggi previsti, sia per ogni distretto che per ogni lista.

Un requisito fondamentale è che i seggi siano il più possibile proporzionali ai voti espressi. Questo problema prende il nome di *allocazione biproporzionale*. Per fortuna è un problema le cui varie formulazioni si possono risolvere in modo algoritmicamente efficiente, però non è nemmeno un problema così semplice da essere affrontato senza adeguati strumenti e competenze matematiche. Infatti in alcuni casi si sono riscontrate anomalie nelle procedure stabilite dalla legge dovute proprio ad errori concettuali. Il caso più vistoso è quello italiano dove si sono verificate anomalie notevoli nelle elezioni politiche del 1996, 2006, 2008 e 2013. Di questo si parlerà in modo dettagliato nel Capitolo 8.

Il territorio nazionale sia diviso in m distretti. Sia H il numero totale di seggi della camera. Siano R_i i seggi allocati al distretto i in base alle popolazioni dei distretti secondo uno dei metodi visti precedentemente ($\sum_i R_i = H$). Alle elezioni siano presenti n liste e siano v_{ij} i voti espressi nel distretto i per la lista j. Siano $V_j := \sum_i v_{ij}$ i voti nazionali per la lista j e sia $V := \sum_j V_j$ il numero totale di voti espressi. Siano P_j i seggi da allocare a livello nazionale alla lista j in base ad uno dei metodi visti precedentemente ($\sum_j P_j = H$). Bisogna determinare i seggi s_{ij} da allocare alla lista j nel distretto i in modo da rispettare i seguenti requisiti:

1. $\sum_{i=1}^{m} s_{ij} = P_j$, per ogni lista j;
2. $\sum_{j=1}^{n} s_{ij} = R_i$, per ogni distretto i;
3. Se $v_{ij} = 0$ per qualche lista j in qualche distretto i, allora $s_{ij} = 0$;
4. I seggi s_{ij} siano "il più proporzionale possibile" ai voti v_{ij}.

È importante notare che i primi tre requisiti corrispondono a dei vincoli di un problema di programmazione matematica dalla struttura molto particolare, cioè ad un problema di flusso definito su un grafo bipartito $G = (N_1, N_2, E)$ in cui i vertici di N_1 corrispondono ai distretti, i vertici di N_2 corrispondono alle liste e c'è un arco $(i, j) \in E$, $i \in N_1$, $j \in N_2$ se e solo se $v_{ij} > 0$. Ogni vertice $i \in N_1$ è una sorgente che emette un flusso R_i e ogni vertice $j \in N_2$ riceve un flusso P_j. In base al teorema di interezza delle reti di flusso [1], i vertici del poliedro delle soluzioni ammissibili sono interi. Quindi, se esistono flussi ammissibili, ne esistono anche di interi che possono essere identificati come seggi da allocare alla lista j nel distretto i.

Mentre i primi tre requisiti non presentano ambiguità, l'ultimo può essere espresso in molti modi alternativi, ognuno dei quali presenta aspetti sia positivi che negativi. Il problema non risiede solo nell'interezza del risultato finale. Anche se i seggi potessero essere frazionari non è del tutto ovvio cosa significhi "il più proporzionale possibile" a causa della doppia proporzionalità richiesta verso i distretti da un lato e verso le liste dall'altro.

Chiamiamo *quote* dei numeri reali che rappresentano l'ideale allocazione di seggi senza il requisito d'interezza. Mentre nell'allocazione proporzionale la definizione di quote non rappresenta normalmente un problema (a parte il caso del parlamento europeo, come si è visto), ora la questione è diversa. Ad esempio potremmo definire le seguenti quote

$$q_{ij} = \frac{v_{ij}}{V} H$$

che rappresenterebbero l'esatta proporzionalità. Però avremmo il problema che in generale

$$\sum_i q_{ij} = \frac{\sum_i v_{ij}}{V} H = \frac{V_j}{V} H \neq P_j, \qquad \sum_j q_{ij} = \frac{\sum_j v_{ij}}{V} H \neq R_i$$

Mentre il non verificarsi della prima eguaglianza è dovuto all'interezza dei seggi (se si adotta il metodo dei resti più alti per l'allocazione dei seggi nazionali P_j alle liste, si avrebbe comunque $P_j \in \{\lfloor \sum_i q_{ij} \rfloor, \lceil \sum_i q_{ij} \rceil\}$), il non verificarsi della seconda diseguaglianza è dovuto soprattutto al fatto che i seggi R_i sono calcolati in base alle popolazioni mentre i valori $\sum_j q_{ij}$ sono valutati in base ai votanti. Non solo i due dati differiscono perché gli aventi diritto al voto sono sempre una parte della popolazione, ma anche perché la partecipazione al voto può variare considerevolmente da distretto a distretto.

Le quote che sono in uso in diverse nazioni, fra cui l'Italia e il Belgio, sono le cosiddette *quote regionali* definite da

$$q_{ij} = \frac{v_{ij}}{\sum_j v_{ij}} R_i$$

che rappresentano una esatta proporzionalità all'interno di ogni distretto. Per definizione si ha $\sum_j q_{ij} = R_i$, ma in generale non si ha $\sum_i q_{ij} = P_j$. È possibile definire delle quote in cui entrambe le somme siano soddisfatte. Tali quote vengono chiamate *fair share* e verranno descritte nel Capitolo 10.

Vogliamo rilevare un problema importante connesso con la definizione delle quote. Se le quote devono rispettare entrambe le somme è inevitabile che ogni cambiamento di voto in un qualsiasi distretto induca un cambiamento delle quote in tutti i distretti. Se si vuole che ci sia una qualche forma di autonomia fra i distretti, ad esempio quanto meno che i voti espressi in un distretto non abbiano influenza sui seggi da allocare in un altro distretto, allora le quote regionali sono più adeguate delle quote fair share.

Tuttavia, le quote fair share godono di proprietà matematiche importanti che si riflettono nella bontà dell'allocazione rispetto alle quote stesse. Ad esempio anche per l'allocazione biproporzionale la non violazione delle quote è una proprietà importante (una volta riconosciuto che le quote scelte siano veramente 'ideali'). Le quote fair share garantiscono sempre l'esistenza di un'allocazione che non violi le quote, come si dimostrerà più avanti. Ciò invece non è garantito per le quote regionali. A questo proposito i consideri il seguente esempio.

Esempio 9. Sia data la seguente matrice di quote regionali (che possiamo pensare derivata da una matrice di voti $v = 10000\,q$)

$$q = \begin{pmatrix} 0.992 & 0.870 & 0.170 & 0.994 & 0.988 & 0.986 \\ 0.460 & 0.580 & 0.991 & 0.993 & 0.989 & 0.987 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.986 & 0.001 & 0.010 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.440 & 0.001 & 0.556 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.140 & 0.856 & 0.001 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\sum_i q_{ij} = (\,1.455 \quad 1.453 \quad 1.164 \quad 3.553 \quad 2.835 \quad 2.540\,)\,.$$

I seggi alle liste su scala nazionale sono allocati seconda la regola dei resti più alti (si otterrebbe lo stesso risultato con i metodi di Webster o di Jefferson) e quindi si ha

$$P = (\,1 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \quad 3 \quad 3\,)$$

Non esiste nessuna allocazione con 0 o 1 seggi per ogni coppia distretto/lista. Infatti la quarta, quinta e sesta lista possono ricevere nel primo e nel secondo distretto al massimo 6 seggi complessivamente. Allora le altre liste (la prima, la seconda e la terza) devono ricevere almeno $10 - 6 = 4$ seggi negli stessi distretti 1 e 2. Ma queste liste hanno a disposizione 3 seggi in totale! Quindi il quarto, o la quinta o la sesta lista deve ricevere 2 seggi o nel distretto 1 o nel distretto 2.

∎

Non esiste un modo univoco di affrontare il problema dell'allocazione biproporzionale. Due sono le linee di pensiero principali. Una prevede la definizione di assiomi che un qualsiasi metodo di allocazione dovrebbe soddisfare e poi si cerca un metodo che li soddisfi. Normalmente tale metodo è unico. Questo è l'approccio proposto da Balinski e Demange [5, 6] che verrà descritto nei Capitoli 9, 10 e 11. L'altra linea di pensiero prevede la definizione di quote ideali e si cerca l'allocazione di seggi che minimizza una opportuna misura di deviazione dalle quote ideali. Si veda la descrizione comprensiva di tali approcci in [23]. Tali metodi sono descritti nei Capitoli **??**–17.

8 Resti più alti e baco italiano

Estendere la regola dei resti più alti all'allocazione biproporzionale non è in generale possibile. Infatti la regola dei resti più alti produce un'allocazione dando per scontato che esista un'allocazione che non viola le quote, ma come si è visto nell'Esempio 9 in realtà tale allocazione potrebbe non esistere. Tuttavia anche quando l'allocazione esiste non è detto che si possa trovarla con pochi e semplici passi. Si consideri il seguente semplice esempio (le righe sono i distretti e le colonne le liste):

Esempio 10.

$$q = \begin{pmatrix} 0.70 & 1.51 & 2.38 & 2.41 \\ 0.70 & 1.49 & 2.42 & 2.39 \\ 0.60 & 3.00 & 2.20 & 2.20 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

In questo caso le quote rispettano sia la somma per distretti che quella per liste. Supponiamo di eseguire il metodo dei resti più alti distretto per distretto. Otteniamo l'allocazione

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

che non rispetta la somma per liste. Se eseguiamo il metodo dei resti più alti lista per lista otteniamo l'allocazione

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

che non rispetta la somma per distretti. Se eseguiamo il metodo direttamente su tutta la matrice si ottiene

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

che è uguale alla prima allocazione e non rispetta la somma per liste. Si può immaginare di assegnare i seggi 'saltando' le coppie distretto/lista per le quali siano già stati allocati tutti i seggi o al distretto o alla lista. Procedendo in questo modo si ottiene

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

∎

Ma anche il metodo di non assegnare seggi qualora un distretto o una lista siano già completi non funziona necessariamente. Si consideri un secondo esempio:

Esempio 11.

$$q = \begin{pmatrix} 0.61 & 0.77 & 0.98 & 0.64 \\ 0.56 & 0.58 & 0.85 & 0.01 \\ 0.98 & 0.13 & 0.10 & 0.79 \\ 0.85 & 0.52 & 0.07 & 0.56 \end{pmatrix} \qquad R = P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Assegnando i seggi alle quote più alte (i resti coincidono con le quote in questo esempio) si assegnano 7 seggi nell'ordine. L'ottavo seggio non può essere assegnato alla prima lista nel primo distretto (quota 0.61) perché il primo distretto ha già ricevuto i suoi tre seggi. Il seggio viene assegnato alla successiva quota dell'elenco e cioè alla seconda lista nel secondo distretto. Si ha quindi la seguente situazione

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Però a questo punto non è più possibile allocare seggi e la procedura è bloccata.

∎

Si può pensare di rivedere le decisioni prese nei passi precedenti (cioè non allocare alcuni seggi) e ripartire con l'allocazione dei seggi rimanenti. Una procedura del genere che corrisponde all'esplorazione di un albero binario, presenta tempi di calcolo assolutamente proibitivi per istanze realistiche.

Ulteriori problemi possono essere causati se si usano le quote regionali in presenza di un diverso tasso di astensionismo nelle varie circoscrizioni, come si vede nel seguente semplice esempio:

Esempio 12. Sia $H = 6$ con la seguente matrice dei voti (righe=circoscrizioni, colonne=liste):

$$v = \begin{pmatrix} 12 & 40 \\ 88 & 10 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

I dati dei voti sono 'strani'. Infatti nella prima circoscrizione sono allocati 4 seggi con un numero totale di 52 votanti, mentre nella seconda circoscrizione sono allocati 2 seggi per 98 votanti. I seggi per le circoscrizioni sono assegnati sulla base delle popolazioni. Quindi nella prima circoscrizione è andato a votare quasi un quarto degli aventi diritto (se nella seconda sono andati tutti gli aventi diritto). L'effetto di questa anomalia si produce nel calcolo delle quote. I seggi a livello nazionale vengono assegnati in base ai voti globali delle due liste, e cioè 100 e 50, il che porta al dato esatto di 4 seggi per la prima lista e 2 seggi per la seconda lista. Le quote regionali sono

$$q = \begin{pmatrix} 0.92 & 3.08 \\ 1.80 & 0.20 \end{pmatrix}$$

Come si vede il valore $\lfloor q_{12} \rfloor = \lfloor 3.08 \rfloor = 3$ è già superiore al valore nazionale di 2 seggi. ∎

Questa premessa dovrebbe far riflettere sul fatto che l'allocazione biproporzionale eseguita secondo il metodo dei resti più alti non si presenta come un problema semplice. Purtroppo cercare di risolvere problemi difficili in modo ingenuo può portare a risultati molto insoddisfacenti. Tale è il caso della legislazione italiana le cui regole in ben quattro elezioni su sei (1996, 2006, 2008 e 2013) non sono state in grado di trovare un'allocazione corretta. L'allocazione finale è stata ottenuta *modificando a posteriori con Decreto Presidenziale i seggi allocati ad alcune circoscrizioni*. Modificare i seggi di una circoscrizione significa alterare la sua rappresentatività. L'articolo 48 della Costituzione Italiana stabilisce, fra le altre cose, che

> *Il voto è personale ed eguale, libero e segreto.*

La parola "eguale" significa che, al di là del fatto ovvio che ogni voto viene contato come un voto, il numero di voti necessari a formare un seggio debba essere lo stesso su tutto il territorio nazionale. Nel 2006 il Trentino-Alto Adige ha ricevuto 11 seggi invece dei 10 previsti e il Molise ne ha ricevuti 2 invece di 3. Il risultato è stato che nel Trentino-Alto Adige bastavano 85.456 voti per formare un seggio mentre nel Molise ne occorrevano 160.300. Si tratta di una palese violazione dell'articolo 48 della Costituzione Italiana, oltre che del già citato articolo 56. Bruno Simeone, che ha individuato questa anomalia insieme con Aline Pennisi e Federica Ricca [19, 20, 21, 22] e l'ha denominata 'Baco elettorale', ha magistralmente riassunto questo fatto nel motto 'One man, half vote!'.

L'attuale (2013) legge italiana è alquanto complicata: inizialmente vengono scartate quelle liste che non riescono a raggiungere delle soglie di sbarramento sia per le liste stesse che per le coalizioni, con alcune eccezioni. I voti di queste liste non vengono presi in considerazione. I rimanenti voti vengono usati per determinare le quote naturali in base alle quali assegnare i seggi alle liste secondo la regola dei resti più alti.

Se, a seguito di questa fase, la coalizione di maggioranza non ha raggiunto i 340 seggi, allora si ripete la procedura separatamente per la coalizione di maggioranza e per tutte le altre liste. Vengono calcolate le quote per la coalizione di maggioranza per un valore $H = 340$ e si assegnano i seggi alle liste della coalizione di maggioranza. Poi vengono calcolate le quote per le altre liste per un valore $H = 277$ e si assegnano i seggi a queste liste.

Si noti che i seggi sono 630, ma 12 di questi sono riservati alla circoscrizione estero e vengono allocati separatamente e la Val d'Aosta ha un unico seggio che viene assegnato con metodo maggioritario. Quindi rimangono 617 seggi. Fissato il valore di maggioranza a 340 seggi (maggioranza abbondante, quasi il 54%) rimangono 277 seggi per le altre liste. Se originariamente le quote, per ogni lista j, erano

$$q'_j = \frac{V_j}{V}\,617$$

adesso diventano (sia M la coalizione di maggioranza)

$$q_j = \frac{V_j}{\sum_{k\in M} V_k}\,340 = q'_j\,\frac{V}{617}\,\frac{340}{\sum_{k\in M} V_k} = \frac{q'_j}{\alpha'}\,\frac{V}{617}\quad,\quad j \in M,$$

$$q_j = \frac{V_j}{\sum_{k\notin M} V_k}\,277 = q'_j\,\frac{V}{617}\,\frac{277}{\sum_{k\notin M} V_k} = \frac{q'_j}{\beta'}\,\frac{V}{617}\quad,\quad j \notin M$$

dove

$$\alpha' := \frac{\sum_{k\in M} V_k}{340}\,,\qquad \beta' := \frac{\sum_{k\notin M} V_k}{277}$$

I valori $\alpha := \lfloor\alpha'\rfloor$ e $\beta := \lfloor\beta'\rfloor$ sono definiti rispettivamente coefficiente di maggioranza e coefficiente di minoranza. Come si vede sono i costi (arrotondati) di un seggio per la maggioranza e per la minoranza. Ad esempio nelle elezioni del 2006 i coefficienti valevano $\alpha = 54158$ e $\beta = 66315$ con un rapporto $\beta/\alpha = 1,224$, nelle elezioni del 2008 i coefficienti valevano $\alpha = 50188$ e $\beta = 57345$ con un rapporto $\beta/\alpha = 1{,}142$ e nelle recenti elezioni del febbraio 2013 valevano $\alpha = 29552$ e $\beta = 80158$ con un rapporto $\beta/\alpha = 2,712$.

A questo punto dovrebbero essere calcolate le quote regionali secondo la formula

$$q'_{ij} = \frac{\nu_{ij}}{\sum_k \nu_{ik}}\,R_i$$

che però non tiene conto della variazione nazionale dei seggi causata dal premio di maggioranza e quindi prima si calibrano le quote in base al premio di maggioranza come

$$q''_{ij} = \frac{\nu_{ij}}{\alpha},\quad j \in M,\qquad q''_{ij} = \frac{\nu_{ij}}{\beta},\quad j \notin M$$

e poi si usano queste quote per calcolare le quote regionali

$$q_{ij} = \frac{q''_{ij}}{\sum_k q''_{ik}}\,R_i$$

Le quote originarie sono quindi state alterate del fattore

$$\frac{q_{ij}}{q'_{ij}} = \frac{\sum_j \nu_{ij}}{\sum_{k\in M}\nu_{ij} + \frac{\alpha}{\beta}\sum_{k\notin M}\nu_{ik}} > 1,\quad j \in M,\qquad \frac{q_{ij}}{q'_{ij}} = \frac{\sum_j \nu_{ij}}{\frac{\beta}{\alpha}\sum_{k\in M}\nu_{ij} + \sum_{k\notin M}\nu_{ik}} < 1,\quad j \notin M$$

mentre il rapporto fra quote di maggioranza e minoranza è alterato del fattore

$$\frac{q_{ih}}{q_{ik}} = \frac{q'_{ih}}{q'_{ik}} \frac{\beta}{\alpha}, \quad h \in M,\ k \notin M$$

Adesso i seggi sono assegnati con il metodo dei resti più alti circoscrizione per circoscrizione. Solo la somma per circoscrizioni è garantita. È molto probabile che alcune liste abbiano un surplus di seggi a livello nazionale ed altre un deficit (ovviamente la somma dei surplus è uguale alla somma dei deficit). Per bilanciare le somme per liste si sceglie la lista con il massimo surplus e si toglie un seggio in quella circoscrizione dove i seggi sono stati assegnati arrotondando in eccesso la quota e questa ha il resto più piccolo. Bisogna però anche aggiungere un seggio nella stessa circoscrizione ad un'altra lista per mantenere costante il numero di seggi della circoscrizione. Questa lista viene scelta fra quelle i cui seggi sono stati assegnati arrotondando per difetto la quota e questa ha il resto più grande.

È chiaro che non c'è garanzia che le condizioni per poter togliere e assegnare un seggio si verifichino fino alla fine della procedura. Già nel semplice Esempio 12 la procedure fallisce. La fase iniziale assegna i seggi pari ai valori $\lfloor q_{ij} \rfloor$ e cioè si ha

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Poi con il metodo dei resti più alti si assegnano i seggi mancanti (2 in questo caso) circoscrizione per circoscrizione, ottenendo

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

La prima lista ha un deficit di un seggio e la seconda un surplus di un seggio. Però la seconda lista ha ottenuto i seggi arrotondando per difetto le quote in entrambe le circoscrizioni e anche la prima lista le ha ottenute arrotondando per eccesso in entrambe le circoscrizioni. Quindi la procedura rimane bloccata. In questo esempio banale non è difficile procedere comunque, anche al di fuori delle regole della procedura, scambiando un seggio fra le due liste nella prima circoscrizione. In generale, con molte liste e molte circoscrizioni, come nel caso del parlamento italiano, la probabilità di mandare in stallo la procedura è abbastanza alta e non è detto che sia possibile rimediare con degli scambi di seggi al di fuori delle regole (peraltro in una materia così delicata come le assegnazioni di seggi parlamentari, non è che sia pensabile 'improvvisare' al di fuori delle regole prefissate). Quindi, se ulteriori scambi non sono possibili le scelte sono due: o si lasciano sbilanciate le somme per liste, quindi assegnando un numero di seggi alle liste diverso da quanto previsto inizialmente su scala nazionale, oppure si operano scambi che alterano le somme nelle circoscrizioni ma non per le liste. Come si evince dai fatti il legislatore ha optato per questa seconda soluzione, nell'idea che i seggi per lista sono 'più importanti' dei seggi per circoscrizione. Ma, si ribadisce, questa scelta costituisce una violazione della costituzione.

L'aspetto stupefacente di questa situazione è la mancanza d'informazione e il grande disinteresse a riguardo. Pochissimi cittadini ne sono a conoscenza e anche la stampa, ripetutamente contattata da Bruno Simeone, non ha dato peso alla vicenda. Il rispetto delle regole non è evidentemente una priorità in Italia.

9 Metodi basati su assiomi

Un modo di procedere ampiamente diffuso, soprattutto nel campo degli studi economico-sociali, per identificare un metodo di decisione che debba essere condiviso ed accettato da persone diverse, consiste nel definire preliminarmente una serie di requisiti, ovvero 'Assiomi', che il metodo debba soddisfare. Questi requisiti sono normalmente semplici e, per così dire, "ovvi", nel senso che un metodo che non li soddisfi non dovrebbe venir ritenuto accettabile. Dopo avere definito gli assiomi, si tratta di vedere se un metodo di decisione con queste caratteristiche esiste veramente e se per di più è unico. In alcuni contesti si può invece ottenere il risultato negativo che un tale metodo non esiste. Ad esempio questo è quanto accade con il celebre Teorema di Impossibilità di Arrow che riguarda l'esistenza di una funzione di benessere sociale. Di questo importante risultato si parlerà a pag. 78. Un altro esempio, positivo in quanto il metodo esiste, è dato dagli assiomi di Nash che stabiliscono la determinazione di un valore di negoziato nei giochi cooperativi.

Per ciò che riguarda il problema dell'allocazione dei seggi il metodo assiomatico è stato proposto per la prima volta da Balinski e Demange [6]. Il problema considerato è leggermente più generale di quello trattato finora in questa sede in quanto i valori R_i e P_j non sono dati, ma sono variabili soggette a fissate limitazioni inferiori e superiori, cioè $\underline{R}_i \leqslant R_i \leqslant \overline{R}_i$, $\underline{P}_j \leqslant P_j \leqslant \overline{P}_j$, mentre il numero totale di seggi H è fissato. Per semplicità riportiamo i risultati di Balinski e Demange riducendoli al caso qui considerato cioè $\underline{R}_i = R_i = \overline{R}_i$, $\underline{P}_j = P_j = \overline{P}_j$ e quindi R_i e P_j sono dati del problema.

La trattazione [6] considera separatamente il caso di allocazione frazionaria di seggi, con numeri quindi reali che rappresentano delle quote ideali, e il caso di allocazione intera, con numeri che rappresentano invece i seggi. Un metodo di allocazione frazionaria va visto come una funzione Q che trasforma i dati del problema, ovvero la matrice v_{ij} dei voti e i valori H, R_i e P_j, in una matrice di numeri reali non negativi. Conviene indicare i dati con una coppia (v, w) dove v è la matrice dei voti e w è l'insieme dei numeri H, R_i e P_j. Allora $Q(v, w)$ è la matrice che risulta dal particolare metodo di allocazione definito dalla funzione Q. Sia inoltre $\mathcal{Q}(w)$ l'insieme delle allocazioni frazionarie ammissibili per i valori w.

Analogamente un metodo di allocazione intera corrisponde ad una funzione S che trasforma (v, w) in una matrice di numeri interi non negativi. Quindi $S(v, w)$ è la matrice di interi che risulta dal particolare metodo di allocazione definito dalla funzione S. Sia $\mathcal{S}(w)$ l'insieme delle allocazioni intere ammissibili per i valori w.

Gli assiomi che un'allocazione frazionaria deve soddisfare sono secondo [6]:

1. Esattezza: se i valori v_{ij} soddisfano $H \sum_j v_{ij} = R_i V$ e $H \sum_i v_{ij} = P_j V$, allora $Q(v, w) = \frac{H}{V} v$.

2. Rilevanza: questo assioma è applicabile nel contesto più generale di valori R_i e P_j variabili in quanto prevede la possibilità che per valori $w \neq w'$ si possa avere $\mathcal{Q}(w) \subset \mathcal{Q}(w')$. Però con valori R_i e P_j fissati, necessariamente $w \neq w'$ implica $\mathcal{Q}(w) \cap \mathcal{Q}(w') = \emptyset$ e quindi l'assioma è vuoto in questo caso.

3. Uniformità: questo assioma considera il comportamento della funzione Q ristretto a sottoinsiemi di distretti e liste. Ciò che si pretende da Q è che, restringendo il problema solo ad alcuni distretti e liste non si ottengano risultati diversi. A questo scopo sia I un sottoinsieme di distretti e J un sottoinsieme di liste e si consideri la sottomatrice v_{IJ} dei voti limitatamente a questi distretti e liste. Sia $q = Q(v, w)$

l'allocazione sull'intera matrice. Un'allocazione sulla sottomatrice $I \times J$ deve soddisfare i vincoli di somma con valori diversi dalla matrice intera in quanto bisogna tener conto dell'allocazione al di fuori della sottomatrice. Quindi definiamo

$$\hat{R}_i := \sum_{j \in J} q_{ij}, \quad i \in I, \qquad \hat{P}_j := \sum_{i \in I} q_{ij}, \quad j \in J, \qquad \hat{H} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} q_{ij}$$

che definiscono i nuovi dati w_{IJ}. Allora si vuole che l'allocazione q ristretta alla sottomatrice e che indichiamo con q_{IJ} sia un'allocazione ammissibile prodotta dalla funzione Q. Se esiste un'altra allocazione q'_{IJ} sempre prodotta da Q sulla sottomatrice allora l'estensione di questa a tutta la matrice definendo $q'_{ij} = q_{ij}$ se $i \notin I$ oppure $j \notin J$ è ancora un'allocazione ammissibilie prodotta da Q.

4. Monotonia: se ν' e ν sono due matrici di voti che differiscono solo in una particolare casella (h, k) dove si ha $\nu'_{hk} > \nu_{hk}$ e $q = Q(\nu, w)$ e $q' = Q(\nu', w)$ allora deve essere $q'_{hk} \geqslant q_{hk}$.

5. Omogeneità: se due righe h e k della matrice dei voti sono proporzionali, cioè $\nu_{hj} = \lambda\, \nu_{kj}$ per ogni j, e $R_h = R_k$, allora l'allocazione deve essere la medesima per le due righe, cioè $q_{hj} = q_{kj}$ per ogni j. Ciò che conta fra le diverse liste sono i rapporti reciproci di voti più che non i valori assoluti dei voti e quindi l'assioma di omogeneità fa proprio questo principio pretendendo uguaglianza dell'allocazione se le liste hanno gli stessi rapporti di voti in due particolari distretti e, naturalmente, se lo stesso numero di seggi è previsto per i due distretti. Il medesimo principio deve valere anche per le colonne.

L'Assioma di Omogeneità è molto forte e insieme con l'Assioma di Uniformità implica l'unicità della funzione Q. Data una matrice di voti ν e valori $w = (H, R_i, P_j)$, si costruisca una nuova istanza con una matrice dei voti $\nu' = (\nu, \nu)$ ottenuta raddoppiando le righe di ν e creando per ogni riga una sua copia. I valori R_i rimangono invariati per ogni riga e la sua copia, mentre i valori P_j e H sono raddoppiati. Quindi $w' = (\nu', (2\,H, (R_i, R_i), 2\,P_j))$. Per l'Assioma di Omogeneità l'allocazione prodotta da $Q(\nu', w')$ raddoppiata deve avere gli stessi valori sulle righe originarie e sulle loro copie, cioè deve avere la forma (q, q). Per l'Assioma di Uniformità q è anche un'allocazione ristretta alla matrice ν. Se esistesse un'altra allocazione g per ν, sempre per l'Assioma di Uniformità, anche (q, g) sarebbe un'allocazione per (ν, ν), e quindi per l'Omogeneità $g = q$.

Questi assiomi devono valere anche per un'allocazione intera. Basta sostituire Q con S, $\mathcal{Q}$ con $\mathcal{S}$, q con s e tener conto che l'allocazione deve essere intera. Si aggiunge un sesto assioma per le allocazioni intere, che impedisce all'allocazione di variare a fronte di variazioni infinitesime di voto. Per essere più precisi si supponga che i voti ν_{ij} siano numeri reali anziché interi. Allora possiamo immaginare una successione di matrici di voti ν^k che tende ad una matrice limite $\bar{\nu}$. Se per ogni ν^k della successione si ottiene la stessa allocazione, allora vogliamo che questa allocazione si ottenga anche per $\bar{\nu}$. Formalmente si ha

6. Completezza: sia $\nu^k \to \bar{\nu}$ e sia $s = S(\nu^k, w)$ per ogni k. Allora $s = S(\bar{\nu}, w)$.

Il requisito di completezza può essere troppo forte se si ammettono valori nulli per qualche ν_{ij}. In questi casi qualsiasi allocazione ammissibile deve dare $s_{ij} = 0$. Potrebbe però avvenire che per una particolare coppia (i, j) si abbia $\nu^k_{ij} \to 0$ con $s_{ij} = 1$ per ogni $S(\nu^k, w)$. Però si deve avere $s_{ij} = 0$ e quindi un tale metodo non soddisferebbe l'assioma di completezza. Come suggerito in [23, 28] conviene rilassare l'assioma aggiungendo l'ipotesi che l'insieme di celle per cui $\nu_{ij} = 0$ rimanga invariante per ogni ν^k e anche per il valore limite $\bar{\nu}$. Questa restrizione ai dati ammissibili ha un senso pratico. Normalmente è molto difficile che una lista ottenga zero voti in qualche distretto. Se i voti sono nulli questo è sempre dovuto al fatto che la lista non si è presentata in un determinato distretto e se questo è il motivo allora è naturale pensare che l'insieme delle celle a zero voti rimanga invariante.

10 La matrice fair share

Il risultato fondamentale di Balinski e Demange è che l'unica allocazione frazionaria che soddisfa gli Assiomi 1–5 è una matrice f detta *fair share* definita da

$$f_{ij} = \lambda_i \, \nu_{ij} \, \mu_j$$

dove $\lambda_i > 0$ e $\mu_j > 0$ sono opportuni moltiplicatori, tali da soddisfare i vincoli di somma

$$\sum_j f_{ij} = R_i, \qquad \sum_i f_{ij} = P_j$$

Una tale matrice, se esiste, soddisfa gli assiomi. L'Assioma 1 è banalmente soddisfatto, dato che basta porre $\lambda_i = H/V$ per ogni i e $\mu_j = 1$ per ogni j. Per dimostrare che l'Assioma 3 è soddisfatto, siano I e J i sottoinsiemi di distretti e liste rispettivamente. Si calcola

$$\hat{R}_i := \sum_{j \in J} \lambda_i \, \nu_{ij} \, \mu_j, \quad i \in I, \qquad \hat{P}_j := \sum_{i \in I} \lambda_i \, \nu_{ij} \, \mu_j, \quad j \in J, \qquad \hat{H} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \lambda_i \, \nu_{ij} \, \mu_j$$

e si constata banalmente che la stessa matrice continua ad essere un'allocazione ammissibile per i sottoinsiemi. Per ciò che riguarda la Monotonia (Assioma 4) si supponga che si abbia

$$f_{ij} = \lambda_i \, \nu_{ij} \, \mu_j, \qquad f'_{ij} = \lambda'_i \, \nu'_{ij} \, \mu'_j$$

con $\nu'_{11} > \nu_{11}$ e $\nu'_{ij} = \nu_{ij}$ per ogni $(i, j) \neq (1, 1)$ e che, per contraddizione, si abbia anche $f'_{11} < f_{11}$ (si è scelta per semplicità notazionale la cella $(1, 1)$, ma il ragionamento è valido per ogni cella). Il fatto che $f'_{11} < f_{11}$ unito all'invarianza della somma per righe e per colonne fa sì che debba necessariamente esistere una coppia di indici $(1, h)$ (quindi sulla stessa riga di $(1, 1)$) per cui $f'_{1h} > f_{1h}$. Ma allora, per lo stesso argomento, deve necessariamente esistere una coppia di indici (k, h) (quindi sulla stessa colonna di $(1, h)$) per cui $f'_{kh} < f_{kh}$. Continuando si deduce che deve esistere un ciclo (non necessariamente contenente la cella $(1, 1)$)

$$(i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), (i_2, j_3) \ldots, (i_1, j_1)$$

in cui $f'_{i_r, j_r} < f_{i_r, j_r}$ and $f'_{i_r, j_{r+1}} > f_{i_r, j_{r+1}}$. Per $(i, j) \neq (1, 1)$ si ha che $f'_{ij} > f_{ij}$ implica $\lambda'_i \, \mu'_j > \lambda_i \, \mu_j$ e $f'_{ij} < f_{ij}$ implica $\lambda'_i \, \mu'_j < \lambda_i \, \mu_j$, mentre $f'_{11} < f_{11}$ implica $\lambda'_1 \, \nu'_{11} \, \mu'_1 < \lambda_1 \, \nu_{11} \, \mu_1 < \lambda_1 \, \nu'_{11} \, \mu_1$, cioè $\lambda'_1 \, \mu'_1 < \lambda_1 \, \mu_1$. Allora lungo il ciclo si ha (indipendentemente dalla presenza della cella $(1, 1)$ nel ciclo)

$$\lambda'_{i_1} \, \mu'_{j_1} < \lambda_{i_1} \, \mu_{j_1}, \quad \lambda_{i_1} \, \mu_{j_2} < \lambda'_{i_1} \, \mu'_{j_2}, \quad \lambda'_{i_2} \, \mu'_{j_2} < \lambda_{i_2} \, \mu_{j_2},, \quad \lambda_{i_2} \, \mu_{j_3} < \lambda'_{i_2} \, \mu'_{j_3}, \quad \ldots$$

e moltiplicando queste diseguaglianze lungo il ciclo si ottiene la contraddizione $1 < 1$. L'Assioma di Omogeneità è banalmente soddisfatto.

L'esistenza di una matrice fair share è sempre garantita se la matrice dei voti ha tutti gli elementi positivi. Se invece sono presenti delle celle con $\nu_{ij} = 0$ la matrice potrebbe non esistere, come nel seguente semplice esempio:

$$\nu = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad P = (\,1 \quad 1\,)$$

Siccome $\nu_{ij} = 0$ implica $f_{ij} = 0$. L'unica matrice che soddisfa il vincolo di somma è la matrice identica, però non esistono moltiplicatori positivi per cui $\lambda_1\, \nu_{12}\, \mu_2 = 0$ e quindi la matrice fair share in questo caso non esiste. Un risultato di esistenza della matrice fair share in presenza di elementi nulli è dato dal seguente teorema [13] che fa riferimento al grafo derivato dai dati del problema introdotto a pag. 30.

Teorema 4. Una matrice fair share esiste se e solo se esiste una soluzione ammissibile ai vincoli

$$\begin{aligned} \sum_{j:(i,j)\in E} x_{ij} &= r_i \qquad i = 1,\dots,m \\ \sum_{i:(i,j)\in E} x_{ij} &= c_j \qquad j = 1,\dots,n \\ x_{ij} &\geqslant \frac{1}{|E|} \qquad (i,j) \in E \end{aligned} \tag{16}$$

∎

L'ammissibilità dei vincoli (16) si può verificare in tempo polinomiale con algoritmi di flusso e in particolare con un algoritmo di massimo flusso. Tuttavia, per calcolare la matrice fair share, conviene in pratica effettuare l'algoritmo RAS [4], che verrà ora descritto, e vedere se l'algoritmo converge. L'algoritmo RAS esegue in modo alternato un riscalamento delle righe e uno delle colonne in modo che i vincoli di somma sulle righe e sulle colonne siano alternativamente rispettati. Quindi, partendo dalla soluzione iniziale $q^0 = \nu$, $\lambda_i^0 = 1$ e $\mu_j^0 = 1$, si effettuano i calcoli

$$\begin{aligned} \alpha_i &:= \frac{R_i}{\sum_j q_{ij}^k}, \qquad \lambda_i^{k+1} = \alpha_i\, \lambda_i^k, \qquad \bar{q}_{ij}^k = \alpha_i\, q_{ij}^k \qquad j = 1,\dots,n, \quad i = 1,\dots m, \\ \beta_j &:= \frac{P_j}{\sum_i q_{ij}^k}, \qquad \mu_j^{k+1} = \beta_j\, \mu_j^k, \qquad q_{ij}^{k+1} = \beta_j\, \bar{q}_{ij}^k \qquad i = 1,\dots,m, \quad j = 1,\dots n. \end{aligned}$$

Le matrici $\bar{q}^k$ rispettano il vincolo di somma sulle righe e le matrici q^k il vincolo di somma sulle colonne. Se e solo se (16) è ammissibile si ha convergenza di λ_i^k, μ_j^k e q_{ij}^k verso i moltiplicatori e verso la matrice fair share. Come dimostrato in [13] il numero di iterazioni per avere un'accuratezza ε, ovvero

$$\sum_i (R_i - \sum_j q_{ij}^k)^2 + \sum_j (P_j - \sum_i q_{ij}^k)^2 \leqslant \varepsilon^2$$

non è superiore a

$$\frac{8\,\rho}{\varepsilon^2}\, H\, \ln H$$

dove $\rho = \max\{\max_i R_i, \max_j P_j\}$. Anche se il valore teorico dato da questa espressione è elevato, normalmente in pratica l'iterazione RAS è alquanto veloce.

È stato dimostrato [24] che i moltiplicatori che definiscono la matrice fair share minimizzano la seguente espressione

$$\sum_{ij} \lambda_i\, \nu_{ij}\, \mu_j - \sum_i R_i\, \ln \lambda_i - \sum_j P_j\, \ln \mu_j$$

fra tutti i valori $\lambda_i > 0$ e $\mu_j > 0$.

Una delle proprietà più importanti della matrice fair share consiste nel fatto che è garantita l'esistenza di un'allocazione ottenuta semplicemente arrotondando per difetto o per eccesso le quote fair share, ovvero di un'allocazione che non violi le quote. Infatti se si aggiunge ai vincoli 1, 2 e 3 elencati a pag. 30 il vincolo $\lfloor q_{ij} \rfloor \leqslant s_{ij} \leqslant \lceil q_{ij} \rceil$, l'insieme ammissibile, se non vuoto, ha vertici interi in base ad un noto teorema di reti di flusso. La matrice fair share è una soluzione ammissibile e quindi esiste anche una soluzione intera.

11 Metodo Tie-and-Transfer

Come detto nel precedente capitolo esiste sempre almeno un'allocazione che si ottiene arrotondando la matrice fair share. Il problema è che non è noto a priori come arrotondare la matrice. Se si usa ad esempio una funzione $\delta(z)$ per decidere come arrotondare valori reali (si veda a pag. 16), quasi certamente i seggi calcolati secondo

$$s_{ij} = [\![\lambda_i \, \nu_{ij} \, \mu_j]\!]$$

non rispettano i vincoli di somma, né sulle righe né sulle colonne. Inoltre in presenza di più allocazioni bisogna esser in grado di specificare quale allocazione il metodo di calcolo debba produrre.

Il metodo Tie-and-Transfer (TT) opera un aggiustamento sui moltiplicatori in modo che i seggi calcolati da $[\![\lambda_i \, \nu_{ij} \, \mu_j]\!]$, usando una funzione segnaposto $\delta(z)$ predefinita, rispettino entrambi i vincoli di somma.

In una fase iniziale il metodo TT calcola delle allocazione unidimensionali con un metodo dei divisori per ogni lista rispettando il vincolo di somma per ogni lista. In questa fase vengono quindi calcolati i moltiplicatori μ_j mentre si pone inizialmente $\lambda_i = 1$. Se

$$\sum_j s_{ij} = [\![\lambda_i \, \nu_{ij} \, \mu_j]\!] = R_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

si è trovata l'allocazione. Altrimenti si ha $\sum_j s_{ij} < R_i$ per qualche distretto i (distretti in deficit) e $\sum_j s_{ij} > R_i$ per qualche altro distretto i (distretto in surplus). L'obiettivo è quello di trasferire seggi dai distretti in surplus a quelli in deficit, ma senza violare le somme sulle liste. Siccome si vuole anche che i seggi siano ottenuti arrotondando nel modo previsto i valori $\lambda_i \, \nu_{ij} \, \mu_j$, bisogna aggiornare ripetutamente i moltiplicatori. L'aggiornamento viene effettuato sfruttando il fatto che, quando per una particolare cella (i, j) si ha

$$\lambda_i \, \nu_{ij} \, \mu_j = \delta(\lfloor \lambda_i \, \nu_{ij} \, \mu_j \rfloor)$$

ovvero un'incertezza (tie), l'arrotondamento può essere effettuato sia per eccesso che per difetto e quindi il seggio in quella cella può essere aumentato o diminuito, operando quindi un trasferimento (transfer), senza violare la regola d'arrotondamento.

Conviene descrivere l'algoritmo facendo riferimento al grafo bipartito G descritto a pag. 30. Sia $D \subset N_1$ l'insieme dei vertici corrispondenti ai distretti in deficit e sia $S \subset N_1$ l'insieme dei vertici corrispondenti ai distretti in surplus. L'algoritmo cerca un cammino da un vertice in D ad un vertice in S in modo che per ogni arco (i, j) del cammino si abbia $\lambda_i \, \nu_{ij} \, \mu_j = \delta(\lfloor \lambda_i \, \nu_{ij} \, \mu_j \rfloor)$. In particolare si vuole che per gli archi dispari del cammino si abbia

$$\lambda_i\, \nu_{ij}\, \mu_j = \delta(s_{ij})$$

in modo che sugli archi dispari i seggi possano essere aumentati di uno mentre sugli archi pari deve essere

$$\lambda_i\, \nu_{ij}\, \mu_j = \delta(s_{ij} - 1)$$

in modo che sugli archi pari i seggi possano essere diminuiti di uno. Definiamo archi ammissibili gli archi che abbiano questa proprietà (dipendente ovviamente dai valori dei moltiplicatori). Con queste variazioni di seggi sul cammino si opera un trasferimento di un seggio da una distretto in surplus ad uno in deficit, mantenendo le somme per liste invariate. Si ripete la ricerca di un cammino e il conseguente trasferimento di un seggio fino ad avere tutti i distretti con il numero corretto di seggi.

Si tratta ora di vedere come realizzare la condizione di ammissibilità per gli archi in modo da trovare il cammino descritto. Partendo dai vertici D si effettua una ricerca di vertici raggiungibili con archi ammissibili fino a raggiungere un vertice in S. Siano L i vertici correntemente raggiunti dall'algoritmo. Si indichino

$$L_1 = L \cap N_1, \quad \overline{L}_1 = \overline{L} \cap N_1, \quad L_2 = L \cap N_2, \quad \overline{L}_2 = \overline{L} \cap N_2$$

Inizialmente $L = D$ per cui $L_1 = D$ e $L_2 = \emptyset$. In base alla regola d'arrotondamento si ha per ogni arco

$$\delta(s_{ij} - 1) \leqslant \lambda_i\, \nu_{ij}\, \mu_j \leqslant \delta(s_{ij})$$

Inizialmente, per ogni vertice $i \in L_1 = D$ si aumenta λ_i in modo da avere $\lambda_i\, \nu_{ij}\, \mu_j = \delta(s_{ij})$ per almeno un vertice $j \in N_2$ e $\lambda_i\, \nu_{ij}\, \mu_j \leqslant \delta(s_{ij})$ per tutti i vertici $j \in N_2$, ovvero si calcola

$$\lambda_i = \min_{j:(i,j)\in E} \frac{\delta(s_{ij})}{\nu_{ij}\, \mu_j} \qquad i \in D$$

Con questo aggiornamento, per ogni $i \in D$ esiste almeno un vertice in N_2 (quello per il quale viene realizzato il minimo nella precedente espressione) raggiungibile da i con un arco ammissibile. Questi vertici vengono aggiunti all'insieme L e l'algoritmo inizia adesso le iterazioni per raggiungere vertici in S.

Per rendere ammissibili nuovi archi senza distruggere l'ammissibilità di quelli già resi ammissibili si sfrutta il fatto che i moltiplicatori sono definiti a meno di una costante moltiplicativa, per cui se si aggiorna un moltiplicatore λ_i come $\lambda_i = \sigma\, \lambda_i$ e un moltiplicatore μ_j come $\mu_j = \mu_j/\sigma$, il prodotto $\lambda_i\, \mu_j$ rimane inalterato per l'arco (i, j).

Possiamo allora considerare i quattro tipi di archi

$$\begin{aligned} E_{LL} &= \{(i,j) \in E : i \in L_1, j \in L_2\}, \quad & E_{\overline{L}L} &= \left\{(i,j) \in E : i \in \overline{L}_1, j \in L_2\right\} \\ E_{L\overline{L}} &= \left\{(i,j) \in E : i \in L_1, j \in \overline{L}_2\right\}, \quad & E_{\overline{L}\overline{L}} &= \left\{(i,j) \in E : i \in \overline{L}_1, j \in \overline{L}_2\right\} \end{aligned}$$

Gli archi resi ammissibili sono tutti contenuti in E_{LL} e quindi i loro prodotti $\lambda_i\, \mu_j$ non devono essere modificati. Gli archi in $E_{L\overline{L}}$ contengono archi che potrebbero essere resi ammissibili aumentando λ_i, $i \in L_1$, in modo da poter raggiungere qualche vertice in $\overline{L}_2$. Gli archi in $E_{\overline{L}L}$ contengono archi che potrebbero essere resi ammissibili diminuendo μ_j, $j \in L_2$, in modo da poter raggiungere qualche vertice in $\overline{L}_1$. Gli archi in $E_{\overline{L}\overline{L}}$ contengono archi che nella fase corrente non interessa rendere ammissibili.

Per rendere ammissibile un arco in $E_{L\overline{L}}$ si calcola

$$\sigma_1 := \min_{i,j)\in E_{L\overline{L}}} \frac{\delta(s_{ij})}{\lambda_i \nu_{ij}\, \mu_j}$$

mentre per rendere ammissibile un arco in $E_{\overline{L}L}$ si calcola

$$\sigma_2 := \max_{i,j)\in E_{\overline{L}L}} \frac{\delta(s_{ij}-1)}{\lambda_i \nu_{ij}\, \mu_j}$$

Per non violare la condizione d'arrotondamento su nessun arco si prende il valore

$$\sigma := \min\left\{\sigma_1\,,\,\frac{1}{\sigma_2}\right\}$$

e poi si effettuano gli aggiornamenti

$$\lambda_i := \sigma\,\lambda_i, \quad i \in L_1, \qquad \mu_j := \mu_j/\sigma, \quad j \in L_2$$

Si noti che il prodotto $\lambda_i\, \mu_j$ rimane inalterato per gli archi in $E_{LL} \cup E_{\overline{L}\overline{L}}$, mentre viene moltiplicato per σ per gli archi in $E_{L\overline{L}}$ e diviso per σ per gli archi in $E_{\overline{L}L}$. In base alla scelta di σ la condizione d'arrotondamento viene mantenuta per ogni arco mentre almeno un arco in $E_{L\overline{L}} \cup E_{\overline{L}L}$ viene reso ammissibile e quindi almeno un vertice in $\overline{L}_1 \cup \overline{L}_2$ viene raggiunto. Se tale vertice sta in S allora il cammino è stato individuato, altrimenti il vertice viene aggiunto a L e la ricerca del cammino prosegue con gli insiemi L_1, $\overline{L}_1$, L_2 e $\overline{L}_2$ aggiornati.

Esempio 13. I dati siano

$$\nu = \begin{pmatrix} 30859 & 60734 & 69152 \\ 6379 & 75730 & 58882 \\ 36616 & 74087 & 11633 \\ 30390 & 63114 & 83119 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 27 \\ 24 \\ 20 \\ 29 \end{pmatrix}, \quad P = (\,17 \quad 46 \quad 37\,), \quad H = 100$$

La prima fase consiste nel calcolare i seggi, colonna per colonna, con un metodo dei divisori. Si scelga la funzione segnaposto $\delta(z) = z + 0.5$ che corrisponde all'arrotondamento all'intero più vicino. Si ottiene

$$\begin{aligned} &\lambda = (\,1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\,) \\ &\mu = (\,1.73271 \quad 1.66776 \quad 1.64781\,)\; 10^{-4} \end{aligned} \qquad s = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 11 \\ 1 & 13 & 10 \\ 6 & 12 & 2 \\ 5 & 11 & 14 \end{pmatrix}$$

Quindi il primo distretto è in deficit di un seggio mentre l'ultimo distretto è in surplus di un seggio. Allora $L_1 = \{1\}$, $L_2 = \emptyset$. Si ha

$$\frac{\delta(s_{11})}{\nu_{11}\,\mu_1} = 1.02862, \quad \frac{\delta(s_{12})}{\nu_{12}\,\mu_2} = 1.03663, \quad \frac{\delta(s_{13})}{\nu_{13}\,\mu_3} = 1.00922$$

da cui $\lambda_1 = 1.00922$, e si aggiorna $L_2 = \{3\}$. Adesso inizia l'iterazione per la ricerca del cammino. si calcola

$$\frac{\delta(s_{11})}{\lambda_1\,\nu_{11}\,\mu_1} = 1.01922, \quad \frac{\delta(s_{12})}{\lambda_1\,\nu_{12}\,\mu_2} = 1.02716$$

da cui $\sigma_1 = 1.01922$ e

$$\frac{\delta(s_{23}-1)}{\lambda_2\,\nu_{23}\,\mu_3} = 0.979114, \quad \frac{\delta(s_{33}-1)}{\lambda_3\,\nu_{33}\,\mu_3} = 0.782514, \quad \frac{\delta(s_{43}-1)}{\lambda_4\,\nu_{43}\,\mu_3} = 0.985657$$

da cui $\sigma_2 = 0.985657$ e

$$\sigma = \min\left\{1.01922\,,\ \frac{1}{0.985657}\right\} = \min\{1.01922\,,\ 1.01455\} = 1.01455$$

Quindi si è raggiunto il quarto distretto in surplus e la ricerca del cammino è terminata. Si possono aggiornare i moltiplicatori come

$$\lambda_1 = 1.00922 \cdot 1.01455 = 1.0239, \qquad \mu_3 = 1.64781/1.01455 \cdot 10^{-4} = 1.62418 \cdot 10^{-4}$$

e la matrice $\lambda_i\,\nu_{ij}\,\mu_j$ è data da

$$\begin{pmatrix} 5.4748 & 10.3711 & 11.5000 \\ 1.1053 & 12.6299 & 9.5634 \\ 6.3445 & 12.3559 & 1.8894 \\ 5.2657 & 10.5259 & 13.5000 \end{pmatrix}$$

per cui si può operare il trasferimento di seggio e si ha la allocazione finale

$$s = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 12 \\ 1 & 13 & 10 \\ 6 & 12 & 2 \\ 5 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$

La matrice fair share per questo esempio è

$$\begin{pmatrix} 5.11502 & 10.3156 & 11.56930 \\ 1.06753 & 12.9865 & 9.94596 \\ 5.89279 & 12.2177 & 1.88964 \\ 4.92466 & 10.4802 & 13.59510 \end{pmatrix}$$

e come si vede non si otterrebbe l'allocazione semplicemente arrotondando la matrice fair share. ∎

12 Metodo Discrete Alternate Scaling (DAS)

Il metodo noto come 'Discrete Alternate Scaling (DAS)' cerca, esattamente come il metodo Tie-and-Transfer, dei moltiplicatori λ_i per ogni distretto e μ_j per ogni lista in modo che i seggi calcolati secondo

$$s_{ij} = [\![\lambda_i\,\nu_{ij}\,\mu_j]\!]$$

usando una funzione segnaposto $\delta(z)$ prefissata, rispettino i vincoli di somma. La procedura DAS è più semplice della procedura TT ma la sua convergenza non è sempre garantita. Sono stati infatti evidenziati alcuni casi critici in cui la procedura cicla.

La procedura opera alternativamente sulle righe e sulle colonne, generando ad ogni passo una matrice frazionaria q, che inizialmente è uguale alla matrice dei voti. Con un metodo dei divisori che usa la matrice q corrente viene calcolata per ogni riga un'allocazione unidimensionale, che rispetta ovviamente il vincolo di somma in ogni distretto. La matrice q viene aggiornata, moltiplicando ogni riga per il rispettivo moltiplicatore λ_i. Se la somma per liste è rispettata si è ottenuta l'allocazione biproporzionale. Altrimenti usando la matrice q appena aggiornata viene calcolata per ogni colonna un'allocazione unidimensionale, che rispetta questa volta il vincolo di somma per ogni lista. La matrice q viene aggiornata, moltiplicando ogni colonna per il rispettivo moltiplicatore μ_j. Se la somma per distretti è rispettata si è ottenuta l'allocazione biproporzionale altrimenti si ripetono i passi precedenti.

Più in dettaglio sia q^k la matrice e siano λ_i^k e μ_j^k i moltiplicatori calcolati al passo k-mo. Posto $q^0 = \nu$, la procedura è

1) Sia λ_i^k tale che $s_{ij} = [\![\lambda_i^k\, q_{ij}^{k-1}]\!]$ e $\sum_j s_{ij} = R_i$. Si calcoli $q_{ij}^k = \lambda_i^k\, q_{ij}^{k-1}$. Se $\sum_i s_{ij} = P_j$ stop, altrimenti sia $k := k+1$ e si vada al punto 2).

2) Sia μ_j^k tale che $s_{ij} = [\![q_{ij}^{k-1}\, \mu_j^k]\!]$ e $\sum_i s_{ij} = P_j$. Si calcoli $q_{ij}^k = q_{ij}^{k-1}\, \mu_j^k$. Se $\sum_j s_{ij} = R_i$ stop, altrimenti sia $k := k+1$ e si vada al punto 1).

I moltiplicatori finali sono dati da

$$\lambda_i = \prod_k \lambda_i^k, \qquad \mu_j = \prod_k \mu_j^k,$$

Esempio 14. Per confrontare i vari metodi useremo questo esempio generato a caso con 5 distretti e 4 liste. Le popolazioni nei distretti sono

$$p = \begin{pmatrix} 117719 & 140901 & 111260 & 151394 & 195893 \end{pmatrix}$$

Dato un valore $H = 100$, i seggi destinati ai distretti, calcolati con la regola dei resti più alti sono

$$R = \begin{pmatrix} 16 & 20 & 16 & 21 & 27 \end{pmatrix}$$

I voti sono stati generati a caso supponendo diversi tassi di assenteismo (generati a caso) e un 'bias' (generato a caso) per le varie liste pari a $(0.346, 0.210, 0.222, 0.222)$. La tabella dei voti è

$$\nu = \begin{pmatrix} 10356 & 6997 & 8380 & 11040 \\ 16547 & 4165 & 9987 & 10710 \\ 1697 & 4493 & 13880 & 12043 \\ 24465 & 27132 & 28203 & 19594 \\ 42350 & 575 & 6451 & 4476 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 36774 \\ 41409 \\ 32113 \\ 99394 \\ 53852 \end{pmatrix}$$

con i voti totali per lista

$$\begin{pmatrix} 95415 & 43362 & 66901 & 57863 \end{pmatrix}$$

che corrispondono alle percentuali

$$\begin{pmatrix} 36.205 & 16.4536 & 25.3854 & 21.956 \end{pmatrix}$$

Il totale dei votanti è $V = 263541$, che dà luogo ad una rappresentatività media $H/V = 0.000379448$. Lo stesso valore, distretto per distretto, e diviso per il valore medio nazionale dà

$$\begin{pmatrix} 1.14667 & 1.27287 & 1.31307 & 0.55681 & 1.32133 \end{pmatrix}$$

A causa dei diversi tassi di astensionismo i valori sono molto diversi. Il terzo distretto che ha il maggior tasso di astensionismo ha voti che 'valgono' di più. Dai voti ottenuti a livello nazionale dalle liste si ricavano i seggi per lista, calcolati con i resti più alti

$$\begin{pmatrix} 36 & 17 & 25 & 22 \end{pmatrix}$$

Il calcolo della rappresentatività per le liste divisa per il valore medio nazionale dà

$$\begin{pmatrix} 0.994338 & 1.03321 & 0.984817 & 1.00201 \end{pmatrix}$$

quindi con dei valori pressoché coincidenti con quelli medi nazionali. La differenza rispetto ai valori calcolati per i distretti risiede nel fatto che i seggi per le liste vengono calcolati in base ai votanti e la differenza rispetto al valore medio è unicamente dovuta all'arrotondamento, mentre i seggi per i distretti sono calcolati a priori sulla popolazione e questo dato può essere poco correlato con i votanti. Le quote regionali sono

$$q = \begin{pmatrix} 4.50591 & 3.04441 & 3.64615 & 4.80352 \\ 7.99198 & 2.01164 & 4.82359 & 5.17279 \\ 0.84551 & 2.23859 & 6.91558 & 6.00031 \\ 5.16897 & 5.73246 & 5.95874 & 4.13983 \\ 21.23320 & 0.28829 & 3.23436 & 2.24415 \end{pmatrix}$$

mentre le quote fair share sono

$$q = \begin{pmatrix} 3.76904 & 3.91439 & 3.65496 & 4.66167 \\ 6.99022 & 2.70458 & 5.05599 & 5.24922 \\ 0.69249 & 2.81828 & 6.78771 & 5.70168 \\ 4.18712 & 7.13781 & 5.78449 & 3.89070 \\ 20.36110 & 0.42494 & 3.71685 & 2.49674 \end{pmatrix}$$

Per operare la procedura DAS si scelga la funzione $\delta(z) = z + 0.5$ (cioè l'arrotondamento all'intero più vicino). I passi sono:

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 4.21505 & 5.13173 & 5.29381 & 2.24485 & 5.09208 \end{pmatrix} \mathbf{10}^{-4}$$

$$q^1 = \begin{pmatrix} 4.36510 & 2.94927 & 3.53221 & 4.65341 \\ 8.49148 & 2.13737 & 5.12506 & 5.49609 \\ 0.89836 & 2.37851 & 7.34780 & 6.37533 \\ 5.49203 & 6.09074 & 6.33116 & 4.39857 \\ 21.56500 & 0.29279 & 3.28490 & 2.27922 \end{pmatrix} \quad s^1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 5 \\ 8 & 2 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 7 & 6 \\ 5 & 6 & 6 & 4 \\ 22 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ci sono 4 seggi in più sulla prima colonna e 4 in meno sulla seconda. Quindi operiamo il riscalamento per colonne ottenendo

$$\mu^2 = \begin{pmatrix} 0.875203 & 1.18919 & 0.991003 & 0.985207 \end{pmatrix}$$

$$q^2 = \begin{pmatrix} 3.82035 & 3.50725 & 3.50043 & 4.58458 \\ 7.43177 & 2.54174 & 5.07895 & 5.41478 \\ 0.78625 & 2.82850 & 7.28169 & 6.28102 \\ 4.80665 & 7.24306 & 6.27420 & 4.33350 \\ 18.87370 & 0.34819 & 3.25535 & 2.24550 \end{pmatrix} \quad s^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 5 \\ 7 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 7 & 6 \\ 5 & 7 & 6 & 4 \\ 19 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Le somme per righe sono sbilanciate, quindi la procedura prosegue per altre tre iterazioni (doppie) fino alla matrice

$$q = \begin{pmatrix} 3.53351 & 3.75616 & 3.50022 & 4.49981 \\ 6.66014 & 2.63753 & 4.92080 & 5.14950 \\ 0.64895 & 2.70322 & 6.49761 & 5.50140 \\ 3.97945 & 6.94348 & 5.61577 & 3.80725 \\ 20.05290 & 0.42836 & 3.73928 & 2.53178 \end{pmatrix} \quad s = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 7 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 6 \\ 4 & 7 & 6 & 4 \\ 20 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

con moltiplicatori finali

$$\lambda = (\,4.18433 \quad 4.936 \quad 4.68963 \quad 1.99475 \quad 5.80678\,)\; 10^{-4},$$
$$\mu = (\,0.815434 \quad 1.28294 \quad 0.998218 \quad 0.974092\,)$$

∎

13 Minima deviazione da quote ideali: norme L_1 e L_2

Siano definite delle quote ideali q_{ij}. Queste possono essere sia le quote fair-share come le quote regionali o altre ancora. Se nel distretto i la lista j riceve s_{ij} seggi, la deviazione dalla quota ideale viene semplicemente misurata come

$$\|q - s\|$$

dove $\|\cdot\|$ è un'opportuna norma nello spazio $\mathbb{R}^{n\times m}$. Il problema da risolvere è pertanto (sia $Z := \{(i,j) : v_{ij} = 0\}$)

$$\begin{aligned} \min\ & \|q - s\| \\ & \sum_i s_{ij} = P_j && j = 1, \dots, n \\ & \sum_j s_{ij} = R_i && i = 1, \dots, m \\ & s_{ij} = 0 && (i,j) \in Z \\ & s_{ij} \geqslant 0, \text{ intero} \end{aligned} \tag{17}$$

Si tratta di un problema di programmazione matematica definito sul grafo bipartito $G = (N_1, N_2, E)$ introdotto a pag. 30. L'obiettivo è convesso, ma, se si riesce a trasformarlo in forma lineare, si può ottenere una soluzione intera in modo efficiente.

In questo capitolo si vedrà come sia possibile operare questa trasformazione per le norme L_1, L_2 e nel prossimo capitolo per la norma L_∞.

Con la norma L_1 la funzione obiettivo in (17) si particolarizza a

$$\min \quad \sum_i \sum_j |s_{ij} - q_{ij}|. \tag{18}$$

Per linearizzare il problema trasformiamo ogni funzione $f_{ij}(s) = |s - q_{ij}|$, convessa e lineare a tratti, in una funzione $g_{ij}(s)$ definita da

$$g_{ij}(s) = \begin{cases} q_{ij} - s & \text{if } s \leqslant \lfloor q_{ij} \rfloor \\ (1 - 2\langle q_{ij}\rangle)(s - \lfloor q_{ij} \rfloor) + \langle q_{ij} \rangle & \text{if } \lfloor q_{ij} \rfloor \leqslant s \leqslant \lceil q_{ij} \rceil \\ s - q_{ij} & \text{if } s \geqslant \lceil q_{ij} \rceil. \end{cases} \tag{19}$$

anch'essa convessa e lineare a tratti, però con i punti di rottura interi ed uguale a $f_{ij}(s)$ sui punti interi (si veda la Figura 3). In questo modo minimizzando $\sum_{ij} g_{ij}(s_{ij})$ si ottengono valori interi.

Per realizzare le funzioni g_{ij} su una rete di flusso, definiamo da G un nuovo grafo bipartito $\mathcal{G} = (N_1, N_2, \mathcal{E})$ in cui i vertici sono gli stessi di G ma ogni arco di E viene trasformato in tre archi paralleli di $\mathcal{E}$. Il flusso su questi archi deve essere non negativo. Sui primi due archi il flusso deve essere vincolato

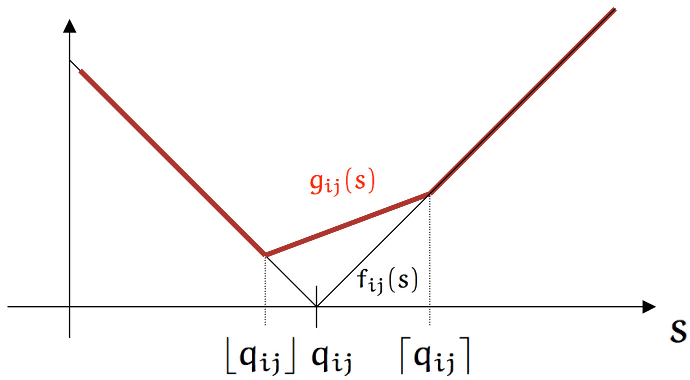


Figura 3: Funzioni f e g per norma L_1

superiormente dalle capacità $\lfloor q_{ij} \rfloor$ e 1, rispettivamente (il terzo arco non ha vincoli superiori). Inoltre i tre archi hanno costo rispettivamente -1, $1 - 2\langle q_{ij} \rangle$ e 1. I flussi sui tre archi siano rispettivamente ξ^1_{ij}, ξ^2_{ij} e ξ^3_{ij}. Se si pone $s_{ij} = \xi^1_{ij} + \xi^2_{ij} + \xi^3_{ij}$ la funzione obiettivo (19) è equivalente a

$$q_{ij} - \xi^1_{ij} + (1 - 2\langle q_{ij} \rangle)\, \xi^2_{ij} + \langle q_{ij} \rangle + \xi^3_{ij} + 1 - \langle q_{ij} \rangle$$

in quanto, dati i coefficienti di costo dei tre flussi ξ^1_{ij}, ξ^2_{ij} e ξ^3_{ij}, non verrà assegnato valore positivo a ξ^2_{ij} finché il flusso ξ^1_{ij} non sarà saturato al valore superiore di capacità $\lfloor q_{ij} \rfloor$ e non verrà assegnato valore positivo a ξ^3_{ij} finché il flusso ξ^2_{ij} non sarà saturato al valore superiore di capacità 1. Allora si ha

$$\sum_{ij} g_{ij}(s_{ij}) = \sum_{ij} (-\xi^1_{ij} + (1 - 2\langle q_{ij} \rangle)\, \xi^2_{ij} + \xi^3_{ij}) + \sum_{ij} (1 + q_{ij})$$

dove il termine $\sum_{ij}(1 + q_{ij})$ è costante ed è ininfluente ai fini della minimizzazione. Pertanto un'allocazione a norma L_1 minima viene trovata risolvendo il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{aligned}
\min \; & \sum_{ij} (-\xi^1_{ij} + (1 - 2\langle q_{ij} \rangle)\, \xi^2_{ij} + \xi^3_{ij}) & \\
& \sum_{i} s_{ij} = P_j & j = 1, \dots, n \\
& \sum_{j} s_{ij} = R_i & i = 1, \dots, m \\
& s_{ij} = \xi^1_{ij} + \xi^2_{ij} + \xi^3_{ij} & (i,j) \notin Z \\
& \xi^1_{ij} \leqslant \lfloor q_{ij} \rfloor, \; \xi^2_{ij} \leqslant 1, & (i,j) \notin Z \\
& s_{ij} = 0 & (i,j) \in Z \\
& s_{ij}, \xi^1_{ij}, \xi^2_{ij}, \xi^3_{ij} \geqslant 0 & (i,j) \notin Z.
\end{aligned} \tag{20}$$

Il medesimo 'trucco' di sostituire una funzione obiettivo con una lineare a tratti che abbia i punti di rottura su valori interi e che in tali punti sia uguale alla funzione obiettivo originaria, può funzionare con una qualsiasi funzione convessa. Però c'è un problema da considerare per funzioni convesse diverse dal

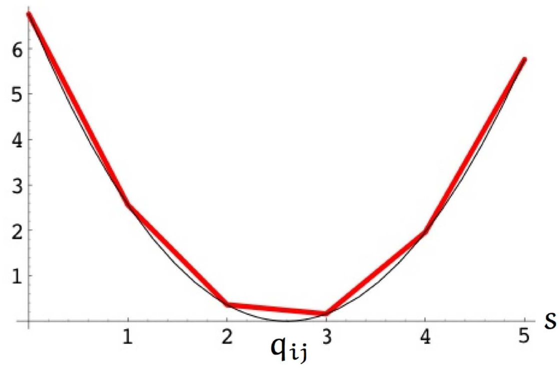


Figura 4: Funzioni f e g per norma L_2

valore assoluto. Nel caso del valore assoluto i punti di rottura sono solo due e quindi la dimensione (nel senso della quantità di simboli necessari a codificare i dati dell'istanza) del nuovo problema dipende linearmente dai dati originali e quindi anche il nuovo problema è polinomiale.

Con funzioni convesse arbitrarie il numero di punti di rottura è limitato superiormente per ogni funzione $f_{ij}(s)$ da $\min\{P_j, R_i\}$, cioè da un valore *pseudopolinomiale* nei dati originari. Quindi un'applicazione 'ingenua' del metodo precedente non produce in generale un metodo polinomiale, anche se, dal punto di vista pratico, non si verificano quasi mai istanze in cui il valore ottimo di s_{ij} cada al di fuori dell'insieme $\{\lfloor q_{ij} \rfloor - 1, \lfloor q_{ij} \rfloor, \lceil q_{ij} \rceil, \lceil q_{ij} \rceil + 1\}$, fatto che implicherebbe al massimo quattro punti di rottura. Dal punto di vista teorico il problema può comunque essere risolto in modo efficiente con opportuni riscalamenti ([17, 18]). Per il problema dell'allocazione biproporzionale sono sufficienti dal punto di vista pratico i quattro punti di rottura evidenziati sopra.

Nel caso di norma L_2 la funzione obiettivo in (17) è $\sqrt{\sum_{ij}(q_{ij} - s_{ij})^2}$ che è equivalente, dal punto di vista della minimizzazione, alla più trattabile (non solo per la mancanza della radice, ma soprattutto perché è separabile) funzione $\sum_{ij}(q_{ij} - s_{ij})^2$ che quindi usiamo come funzione obiettivo in (17).

Data la funzione quadratica $f_{ij}(s) = (s - q_{ij})^2$, la funzione $g_{ij}(s)$ lineare a tratti e coincidente con $f_{ij}(s)$ per s intero è definita da (si veda la Figura 4)

$$g_{ij}(s) = (\lfloor s \rfloor - q_{ij})^2 + \langle s \rangle \; (1 + 2\,(\lfloor s \rfloor - q_{ij}))$$

che porta quindi al seguente problema di Programmazione Lineare

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{ij} \sum_{k} (1 + 2\,(k - q_{ij}))\, \xi_{ij}^{k} \\
& \sum_{i} s_{ij} = P_j && j = 1, \ldots, n \\
& \sum_{j} s_{ij} = R_i && i = 1, \ldots, m \\
& s_{ij} = \sum_{k} \xi_{ij}^{k} && (i,j) \notin Z \\
& \xi_{ij}^{k} \leqslant 1 && k = 0, \ldots, \min\{P_j, R_i\};\ (i,j) \notin Z \\
& s_{ij} = 0 && (i,j) \in Z \\
& s_{ij}, \xi_{ij}^{k} \geqslant 0 && k = 0, \ldots, \min\{P_j, R_i\};\ (i,j) \notin Z.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Non necessariamente un'allocazione ottima per la norma L_1 o per la norma L_2 rispetta le quote. Si consideri il seguente esempio:

Esempio 15. Sia data la matrice $(n+2) \times (n+2)$ di quote (si noti che sono rispettati i vincoli di somma sia per righe che per colonne, quindi sono quote fair-share)

$$
q = \begin{pmatrix}
\frac{n-1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\
\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{1}{n} & 0 & \cdots & \frac{n-1}{n} & 0 \\
\frac{1}{n} & 0 & \cdots & 0 & \frac{n-1}{n}
\end{pmatrix}, \qquad R = (\,2 \quad 1 \quad \cdots \quad 1\,), \qquad P = (\,2 \quad 1 \quad \cdots \quad 1\,).
$$

Date le allocazioni

$$
s^1 = \begin{pmatrix}
2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}, \quad
s^2 = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}, \quad
s^3 = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1,
\end{pmatrix}
$$

tutte le altre allocazioni si ottengono da s^2 o da s^3 come permutazione degli indici $\{2, \ldots, n+2\}$, a costo invariante. I costi delle tre allocazioni in norma L_1 sono

$$
\|s^1 - q\|_1 = 4 + \frac{4}{n}, \qquad \|s^2 - q\|_1 = 6 - \frac{2}{n}, \qquad \|s^3 - q\|_1 = 10 - \frac{10}{n},
$$

e i costi in norma L_2 sono

$$
\|s^1 - q\|_2^2 = 1 + \frac{5}{n} + \frac{4}{n^2}, \qquad \|s^2 - q\|_2^2 = 3 - \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2}, \qquad \|s^3 - q\|_2^2 = 7 - \frac{11}{n} + \frac{4}{n^2}.
$$

Quindi per $n > 4$ l'allocazione ottima, sia per la norma L_1 che per la norma L_2, è s^1, con s^1_{11} al di fuori di $\{0, 1\}$.

∎

Se le allocazioni ottime non violano le quote, allora la norma L_1 e la norma L_2 danno luogo alla stessa allocazione ottima. Più esattamente si ha:

Teorema 5. Se un'allocazione ottima per la norma L_1 non viola le quote, allora la stessa allocazione è ottima per la norma L_2.

Dimostrazione: Sia s una qualsiasi allocazione che non violi le quote. Sia $D := \{(i,j) : s_{ij} = \lfloor q_{ij} \rfloor\}$ e $U := \{(i,j) : s_{ij} = \lceil q_{ij} \rceil\}$. Allora

$$\|s-q\|_1 - \|s-q\|_2^2 = \sum_{(i,j)\in D} (\langle q_{ij}\rangle - \langle q_{ij}\rangle^2) + \sum_{(i,j)\in U} (1 - \langle q_{ij}\rangle - (1-\langle q_{ij}\rangle)^2) =$$

$$\sum_{(i,j)\in D} \langle q_{ij}\rangle (1-\langle q_{ij}\rangle) + \sum_{(i,j)\in U} (1-\langle q_{ij}\rangle) \langle q_{ij}\rangle = \sum_{(i,j)} \langle q_{ij}\rangle (1-\langle q_{ij}\rangle)$$

Quindi la differenza $\|s-q\|_1 - \|s-q\|_2^2$ è invariante rispetto all'arrotondamento e dipende solo dai valori delle quote. Questo implica che l'ordinamento dei valori $\|s-q\|_1$, per ogni s che non violi le quote, è il medesimo dei valori $\|s-q\|_2^2$, a sua volta uguale all'ordinamento dei valori $\|s-q\|_2$. Quindi se l'allocazione ottima per la norma L_1 non viola le quote è anche la migliore allocazione per la norma L_2 fra quelle allocazioni che non violano le quote.

Resta da dimostrare che un'allocazione $\hat{s}$ ottima per L_1 è ottima per L_2 fra tutte le allocazioni. Sia s' un'allocazione che viola le quote. Definiamo $B := \left\{(i,j) : s'_{ij} < \lfloor q_{ij} \rfloor \vee s'_{ij} > \lceil q_{ij} \rceil\right\}$. Si noti che

$$1 < |s'_{ij} - q_{ij}| < |s'_{ij} - q_{ij}|^2 \qquad (i,j) \in B \tag{22}$$

Allora si prenda in esame la seguente catena di diseguaglianze, dove la prima diseguaglianza deriva dall'ottimalità di $\hat{s}$ rispetto alla norma L_1, la seconda da (22) e la terza dal fatto che $\langle a\rangle (1-\langle a\rangle) \geqslant 0$, e l'ultima uguaglianza deriva dal fatto che $\hat{s}$ non viola le quote,

$$\|\hat{s}-q\|_1 - \|s'-q\|_2^2 \leqslant \|s'-q\|_1 - \|s'-q\|_2^2 = \sum_{(i,j)\in D\cup U} (1-\langle q_{ij}\rangle) \langle q_{ij}\rangle + \sum_{(i,j)\in B} (|s'_{ij}-q_{ij}| - |s'_{ij}-q_{ij}|^2) <$$

$$\sum_{(i,j)\in D\cup U} (1-\langle q_{ij}\rangle) \langle q_{ij}\rangle \leqslant \sum_{(i,j)} (1-\langle q_{ij}\rangle) \langle q_{ij}\rangle = \|\hat{s}-q\|_1 - \|\hat{s}-q\|_2^2$$

Confrontando il primo e l'ultimo termine si ha $\|\hat{s}-q\|_2^2 < \|s'-q\|_2^2$, cioè l'ottimalità di $\hat{s}$ rispetto alla norma L_2. ∎

Si noti che può invece avvenire che un'allocazione ottima per la norma L_2 non violi le quote, ma la stessa allocazione non sia ottima per la norma L_1, in quanto ne esiste un'altra migliore e che viola le quote (e naturalmente non ottima per la norma L_2).

Esempio 16. Sia data la matrice di quote fair-share

$$q = \begin{pmatrix} 0.56 & 0.24 & 0.24 & 0.24 & 0.24 & 0.24 & 0.24 \\ 0.24 & 0.76 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.24 & 0 & 0.76 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.24 & 0 & 0 & 0.76 & 0 & 0 & 0 \\ 0.24 & 0 & 0 & 0 & 0.76 & 0 & 0 \\ 0.24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.76 & 0 \\ 0.24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.76 \end{pmatrix}, \qquad R = P = (\, 2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\,).$$

Si considerino le due allocazioni

$$s^1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'allocazione s^1, che viola le quote, è ottima per la norma L_1 ma non per la norma L_2, mentre l'allocazione s^2 è ottima per la norma L_2 ma non per la norma L_1. Si ha in particolare

$$\|s^1 - q\|_1 = 5.76, \qquad \|s^2 - q\|_1 = 6.32$$
$$\|s^1 - q\|_2^2 = 3.1104, \qquad \|s^2 - q\|_2^2 = 2.7904$$

∎

È stato proposto in letteratura anche un metodo di allocare i seggi minimizzando una qualsiasi norma L_p, imponendo però anche il vincolo del rispetto delle quote. Si tratta del *Controlled Rounding* di Cox e Ernst [9]. Il problema può essere formulato in modo naturale introducendo variabili binarie x_{ij} ad indicare se il seggio viene allocato arrotondando la quota per difetto o per eccesso, cioè

$$s_{ij} = \lfloor q_{ij} \rfloor + x_{ij}, \qquad (i,j) \notin Z.$$

Quindi si ha

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j)\notin Z} |\lfloor q_{ij} \rfloor + x_{ij} - q_{ij}|^p \\ & \sum_j (\lfloor q_{ij} \rfloor + x_{ij}) = R_i \qquad i = 1, \ldots, m \\ & \sum_i (\lfloor q_{ij} \rfloor + x_{ij}) = P_j \qquad j = 1, \ldots, n \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad (i,j) \notin Z, \end{aligned} \tag{23}$$

Siccome, come già fatto notare, ogni funzione a valori reali $f(z)$ di una variabile binaria z può essere scritta come una funzione lineare, $f(z) = f(0)\,(1 - z) + f(1)\,z$, il problema (23) può essere riscritto in modo equivalente come

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j)\notin Z} d_{ij}\, x_{ij} \\ & \sum_j x_{ij} = \bar{R}_i \qquad i = 1, \ldots, m \\ & \sum_i x_{ij} = \bar{P}_j \qquad j = 1, \ldots, n \\ & 0 \leqslant x_{ij} \leqslant 1 \qquad (i,j) \notin Z, \end{aligned} \tag{24}$$

dove

$$\begin{aligned} d_{ij} &= (1 - \langle q_{ij} \rangle)^p - \langle q_{ij} \rangle^p \\ \bar{R}_i &= R_i - \sum_j \lfloor q_{ij} \rfloor \\ \bar{P}_j &= P_j - \sum_i \lfloor q_{ij} \rfloor, \end{aligned}$$

Le funzioni obiettivo in (23) e (24) differiscono per il termine costante $\sum_{(i,j)\notin Z} \langle q_{ij} \rangle^p$.

Esempio 17.

Per i dati dell'Esempio 14 si ottengono le seguenti allocazioni, s^1 che minimizza la norma L_1 e s^2 che minimizza la norma L_2, entrambe rispetto alle quote regionali,

$$s^1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 5 \\ 7 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 7 & 6 \\ 5 & 6 & 6 & 4 \\ 21 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad s^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 7 & 6 \\ 4 & 7 & 6 & 4 \\ 21 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

con valori

$$\|s^1 - q\|_1 = 9.07404, \qquad \|s^2 - q\|_1 = 9.16286$$
$$\|s^1 - q\|_2^2 = 7.46520, \qquad \|s^2 - q\|_2^2 = 7.41521$$

Si noti che s^2 non viola le quote, mentre s^1 le viola. In particolare le due allocazioni differiscono in quattro elementi della tabella. Usando le quote fair share le allocazioni ottime per le due norme coincidono e sono

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 & 5 \\ 7 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 7 & 5 \\ 4 & 7 & 6 & 4 \\ 20 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

È interessante valutare la rappresentatività dei seggi ottenuti. Il seguente dato è normalizzato rispetto al dato nazionale

$$\left[\frac{s^1_{ij}}{v_{ij}}\right] \frac{V}{H} = \begin{pmatrix} 0.763 & 1.507 & 1.258 & 1.194 \\ 1.115 & 1.898 & 1.319 & 1.230 \\ 0 & 1.760 & 1.329 & 1.313 \\ 0.539 & 0.583 & 0.561 & 0.538 \\ 1.307 & 4.583 & 1.226 & 1.178 \end{pmatrix}, \qquad \left[\frac{s^2_{ij}}{v_{ij}}\right] \frac{V}{H} = \begin{pmatrix} 1.018 & 1.130 & 1.258 & 1.194 \\ 1.115 & 1.898 & 1.319 & 1.230 \\ 0 & 1.760 & 1.329 & 1.313 \\ 0.431 & 0.680 & 0.561 & 0.538 \\ 1.307 & 4.583 & 1.226 & 1.178 \end{pmatrix}$$

Ma, trattandosi di quote regionali, sembra più corretto normalizzare i dati di ogni riga rispetto alla rappresentatività del distretto ottenendo

$$\left[\frac{s^1_{ij}}{v_{ij}} \frac{\sum_j v_{ij}}{R_i}\right] = \begin{pmatrix} 0.666 & 1.314 & 1.097 & 1.041 \\ 0.876 & 1.491 & 1.037 & 0.967 \\ 0 & 1.340 & 1.012 & 1.000 \\ 0.967 & 1.047 & 1.007 & 0.966 \\ 0.989 & 3.469 & 0.928 & 0.891 \end{pmatrix}, \qquad \left[\frac{s^2_{ij}}{v_{ij}} \frac{\sum_j v_{ij}}{R_i}\right] = \begin{pmatrix} 0.888 & 0.985 & 1.097 & 1.041 \\ 0.876 & 1.491 & 1.037 & 0.967 \\ 0 & 1.340 & 1.012 & 1.000 \\ 0.774 & 1.221 & 1.007 & 0.966 \\ 0.989 & 3.469 & 0.928 & 0.891 \end{pmatrix}$$

Balza all'occhio il dato anomalo di 3.469. Evidentemente essendo la quota compresa fra 0 e 1, l'arrotondamento a 1 causa un aumento notevole rispetto a tutti gli altri valori. La rappresentatività relativamente all'allocazione con quote fair share normalizzate rispetto al dato nazionale è data dai seguenti valori

$$\left[\frac{s_{ij}}{v_{ij}}\right] \frac{V}{H} = \begin{pmatrix} 1.018 & 1.507 & 0.943 & 1.194 \\ 1.115 & 1.898 & 1.319 & 1.230 \\ 1.553 & 1.760 & 1.329 & 1.094 \\ 0.431 & 0.680 & 0.561 & 0.538 \\ 1.245 & 0 & 1.634 & 1.766 \end{pmatrix}$$

∎

14 Minima distanza utopica

Se le quote rappresentano l'ideale allocazione frazionaria, allora l'ideale allocazione intera è quella che arrotonda ogni quota all'intero più vicino. Una tale allocazione, che possiamo definire *utopica* non è però normalmente ottenibile a causa dei vincoli di somma. Possiamo allora valutare un'allocazione che non violi le quote in base al numero di celle (i, j) per le quali l'arrotondamento non viene effettuato all'intero più vicino e possiamo definire questo numero come *distanza utopica*. Tanto minore è il numero tanto più soddisfacente è l'allocazione. Se la distanza fosse nulla, certamente l'allocazione sarebbe ottima secondo ogni tipo di misura di deviazione dalle quote.

Possiamo quindi modellare il problema esattamente come nel precedente modello di Cox e Ernst, in cui si cerca un'allocazione che non viola le quote, con una funzione obiettivo che conta il numero di celle in cui l'arrotondamento avviene dalla parte 'sbagliata'. Più esattamente, supponendo che l'allocazione venga determinata da una variabile binaria x_{ij} per cui i seggi si ottengono da

$$s_{ij} = \lfloor q_{ij} \rfloor + x_{ij}, \qquad (i, j) \notin Z,$$

si definisca la seguente funzione $f_{ij}(x)$ per ogni cella:

$$\langle q_{ij} \rangle < 0.5 \Longrightarrow \begin{cases} f_{ij}(0) = 0 \\ f_{ij}(1) = 1 \end{cases} \qquad \langle q_{ij} \rangle > 0.5 \Longrightarrow \begin{cases} f_{ij}(0) = 1 \\ f_{ij}(1) = 0 \end{cases} \qquad \langle q_{ij} \rangle = 0.5 \Longrightarrow \begin{cases} f_{ij}(0) = 0 \\ f_{ij}(1) = 0 \end{cases}$$

che significa usare in (24) i seguenti coefficienti d_{ij}

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } \langle q_{ij} \rangle < 0.5 \\ -1 & \text{se } \langle q_{ij} \rangle > 0.5 \\ 0 & \text{se } \langle q_{ij} \rangle = 0.5 \end{cases}$$

Siccome possono esistere diverse allocazioni alternative con la stessa distanza utopica è opportuno discriminare ulteriormente fra queste soluzioni con un obiettivo di secondo livello, ad esempio minimizzando semplicemente la norma L_1 (o la norma L_2 che con quote non violate è equivalente alla norma L_1), che si può ottenere assegnando un costo $1 - 2\langle q_{ij} \rangle$ per ogni termine. I due obiettivi lessicografici possono essere fusi assieme in un unico obiettivo ottenuto sommando i due obiettivi e assegnando al primo un peso K sufficientemente alto, ad esempio

$$d_{ij} = \begin{cases} K + 1 - 2\langle q_{ij} \rangle & \text{se } \langle q_{ij} \rangle < 0.5 \\ -K + 1 - 2\langle q_{ij} \rangle & \text{se } \langle q_{ij} \rangle > 0.5 \\ 0 & \text{se } \langle q_{ij} \rangle = 0.5 \end{cases}$$

Tenendo conto che $-1 < 1 - 2\langle q_{ij} \rangle < 1$ è sufficiente prendere $K > m\,n$ per avere la garanzia che un'allocazione ottima per questi coefficienti è anche una che minimizza la distanza utopica.

È interessante notare che i metodi TT a DAS ottengono *a posteriori* una matrice di quote $\lambda_i\, \nu_{ij}\, \mu_j$ e un'allocazione $[\![\lambda_i\, \nu_{ij}\, \mu_j]\!]$ che è necessariamente utopica. Si sottolinea che la matrice $\lambda_i\, \nu_{ij}\, \mu_j$ non è generalmente la matrice fair share in quanto i moltiplicatori sono diversi.

15 Minima deviazione da quote ideali: norma L_∞

Minimizzare la norma L_∞ significa minimizzare la massima deviazione in valore assoluto, fra tutte le coppie distretto/lista, del numero di seggi allocato dalla quota ideale, comunque essa sia definita, cioè

$$\tau^* = \min \max_{ij} |q_{ij} - s_{ij}|$$

Un modo ([28]) per affrontare il problema consiste nel fissare una deviazione τ e vedere se esiste un'allocazione che non superi tale valore di deviazione, ovvero se esiste un'allocazione s che, oltre a rispettare i vincoli di allocazione, sia anche ammissibile per i vincoli

$$q_{ij} - \tau \leqslant s_{ij} \leqslant q_{ij} + \tau$$

Data l'interezza dei seggi tali diseguaglianze sono equivalenti a

$$\lceil q_{ij} - \tau \rceil^+ \leqslant s_{ij} \leqslant \lfloor q_{ij} + \tau \rfloor \tag{25}$$

Si è già fatto notare che il problema dell'allocazione biproporzionale può essere modellato come un problema di flusso su un grafo bipartito G (si veda a pag. 30) per il quale quindi i vincoli (25) sono vincoli di capacità. Essendo i vincoli interi c'è la garanzia che, se esiste un flusso ammissibile, ne esiste anche uno intero, ovvero un'allocazione di seggi.

L'ammissibilità del flusso con i vincoli aggiuntivi (25) può essere verificata tramite un problema di massimo flusso nel seguente modo [1]. Si indichi per semplicità notazionale

$$a_{ij} := \lceil q_{ij} - \tau \rceil^+, \qquad b_{ij} := \lfloor q_{ij} + \tau \rfloor$$

Si aggiungono un nodo sorgente i_0 e un nodo pozzo j_0 a G. Ad ogni arco (i, j) viene assegnato l'intervallo di capacità $[0, b_{ij} - a_{ij}]$. Poi, per ogni $i \in N_1$, se $\sum_{j \in N_2} a_{ij} < R_i$ si aggiunge l'arco (i_0, i) con intervallo di capacità $[0, R_i - \sum_{j \in N_2} a_{ij}]$ (se avviene $\sum_{j \in N_2} a_{ij} > R_i$ allora ovviamente non può esistere nessuna allocazione di seggi), e, per ogni $j \in N_2$, se $\sum_{i \in N_1} a_{ij} < P_j$ si aggiunge l'arco (j, j_0) con intervallo di capacità $[0, P_j - \sum_{i \in N_1} a_{ij}]$ (nuovamente, se avviene $\sum_{i \in N_1} a_{ij} > P_j$ allora non può esistere nessuna allocazione di seggi).

Sia $\hat{\xi}$ il flusso massimo. Allora esiste una soluzione ammissibile su G se e solo se il massimo flusso vale $\sum_i (R_i - \sum_j a_{ij}) = \sum_j (P_j - \sum_i a_{ij}) = H - \sum_{ij} a_{ij}$, ovvero tutti gli archi aggiuntivi collegati alla sorgente e al pozzo sono saturati. In questo caso i seggi sono dati da

$$s_{ij} = a_{ij} + \hat{\xi}_{ij}$$

Si noti appunto che $\sum_j s_{ij} = \sum_j (a_{ij} + \hat{\xi}_{ij}) = \sum_j a_{ij} + R_i - \sum_j a_{ij}$ e similmente $\sum_i s_{ij} = \sum_i (a_{ij} + \hat{\xi}_{ij}) = \sum_i a_{ij} + P_j - \sum_i a_{ij}$. Allora tutti i seggi previsti per i distretti e per le liste possono essere allocati all'interno dei vincoli (25), cioè con una deviazione massima pari a τ.

Si tratta allora di determinare il valore minimo τ^* per cui esiste un flusso ammissibile. Tale valore può essere trovato con una ricerca binaria. Si può notare che i vincoli (25) cambiano solo per quei valori di τ per cui $q_{ij} + \tau$ è intero oppure $q_{ij} - \tau$ è intero. Quindi nella ricerca binaria solo questi valori sono rilevanti e la ricerca binaria può essere più efficacemente condotta solo sull'insieme di *deviazioni rilevanti*

$$T := \bigcup_{ij} \{|q_{ij} - k| : k = 0, 1, \ldots, \min\{R_i, P_j\}\}$$

Si noti che per ogni coppia (i, j) ci sono al massimo $R_i + 1$ deviazioni rilevanti. Sommando questi valori su tutti i distretti si ottiene $H+m$ e quindi in totale si ha $|T| \leqslant n\,(H+m)$. Scambiando il ruolo di distretti e liste si ottiene con un ragionamento analogo anche $|T| \leqslant m\,(H+n)$. Normalmente si ha $n \leqslant m$ per cui consideriamo direttamente $|T| \leqslant n\,(H+m)$.

Un'idea di algoritmo per trovare l'allocazione ottima allora consiste nel calcolo delle deviazioni rilevanti, nel loro ordinamento e poi nel calcolo di un numero $O(\log|T|) = O(\log(H\,n))$ di problemi di massimo flusso per la ricerca binaria. Per valutare la complessità computazionale dobbiamo tenere in conto la dimensione dell'istanza che è data dagli $m\,n$ valori q_{ij}, dagli n numeri P_j e dagli m numeri R_i. Il valore H non è necessario perché viene dedotto dai numeri P_j o dai numeri R_i.

Dato che il problema del massimo flusso è polinomiale e che $O(\log(H\,n))$ è polinomiale (ancorché debolmente polinomiale data la dipendenza da $\log H$) sembrerebbe allora che il metodo delineato sia polinomiale. In realtà a ben guardare il metodo richiede il calcolo degli $n\,(H+m)$ errori rilevanti e solo questo calcolo è esponenziale. Quindi per pervenire ad un algoritmo polinomiale bisogna trovare un modo per aggirare questo ostacolo.

Come viene osservato in [28] 'there are two aspects to be considered. Clearly the computational complexity of an algorithm must be taken into account. On the other hand, the size of the problems to be solved is never very large. On the contrary, given the power of modern computers, these instances can be considered small and even a naive algorithm can run in a satisfactory amount of time. Hence we think that it is also important that an algorithm be sufficiently simple to be implemented easily and described in a law'.

Avendo in mente questi due criteri contrapposti di semplicità implementativa da un alto e complessità computazionale dall'altro vengono proposti in [28] tre algoritmi di complessità computazionale decrescente ma 'complessità' implementativa crescente. Il primo algoritmo calcola inizialmente il minimo valore *intero* $\bar{\tau}$ tale che

$$\lfloor q_{ij} - \bar{\tau} \rfloor^+ \leqslant s_{ij} \leqslant \lceil q_{ij} + \bar{\tau} \rceil$$

è soddisfatto. A scanso di equivoci si noti che questo vincolo non è il vincolo (25). Se $\bar{\tau} = 0$ significa che esiste un'allocazione che non viola le quote. Se $\bar{\tau} = 1$ significa che non esiste un'allocazione che non viola le quote, però la massima deviazione è compresa fra 1 e 2, e similmente per valori più alti di $\bar{\tau}$. Il valore $\bar{\tau}$ viene calcolato risolvendo al massimo $\max_i R_i$ problemi di massimo flusso, provando $\bar{\tau} = 0, 1, \ldots, (\max_i R_i - 1)$ (in pratica $\bar{\tau}$ vale quasi sempre 0 o 1). Questa fase, potendo richiedere fino a $\max_i R_i$ problemi di massimo flusso è pseudo-polinomiale. Una volta trovato $\bar{\tau}$ si sa che $\bar{\tau} \leqslant \tau^* \leqslant \bar{\tau} + 1$ e quindi il valore di τ^* può esssere cercato fra i $2\,m\,n$ valori rilevanti compresi fra $\bar{\tau}$ e $\bar{\tau} + 1$ (non necessariamente con ricerca binaria, anche una scansione di tutti i valori può bastare). Questi valori rilevanti sono

$$\bigcup_{ij} \{\langle q_{ij} \rangle + \bar{\tau}\,;\ 1 - \langle q_{ij} \rangle + \bar{\tau}\}$$

Questa seconda fase è fortemente polinomiale. Se le quote sono le fair share si sa a priori che $\bar{\tau} = 0$ e quindi questo algoritmo è fortemente polinomiale. Avendo a disposizione un algoritmo di massimo flusso questa procedura è di semplice implementazione.

Il secondo algoritmo esegue una ricerca binaria per calcolare il valore $\bar{\tau}$ e poi procede come il precedente algoritmo. La prima fase è debolmente polinomiale e quindi tutto l'algoritmo è debolmente polinomiale. La seconda fase può essere accelerata ordinando le deviazioni rilevanti ed eseguendo una ricerca binaria.

Il terzo algoritmo è fortemente polinomiale. Si tratta di un algoritmo molto complesso e si rinvia a [28] per la sua descrizione.

16 Unicità della soluzione

Una proprietà fondamentale che un metodo di allocazione deve possedere è la non ambiguità nella determinazione dei seggi. La soluzione deve essere unica e non sono ammesse scelte arbitrarie. Teoricamente però scelte arbitrarie potrebbero essere necessarie in circostanze eccezionali. Se ad esempio tutte le liste ricevessero lo stesso numero di voti e il numero di seggi da allocare non è un multiplo del numero delle liste, allora ci sarebbe parità fra tutte le liste in termini di voti ma sarebbe impossibile avere parità in termini di seggi e quindi qualsiasi metodo che si basasse sul numero dei voti ad un certo punto si troverebbe davanti a delle scelte non univoche.

Circostanze del genere sono tuttavia altamente improbabili in casi pratici. Anche il semplice fatto che due quote abbiano parte frazionaria uguale o che queste siano complementari all'unità è improbabile (purché liste e distretti siano più di due) e spesso tale parità di deviazione dalle quote, ammesso che si verifichi, si può risolvere in una parità di seggi. Quindi normalmente parità di questo genere non costituiscono motivo di preoccupazione.

Un motivo più concreto di "parità" può essere causato dalla non unicità delle soluzioni ottime per i problemi che minimizzano la deviazione dalle quote. In particolare per la norma L_∞ la non unicità si verifica quasi sempre. Il motivo è abbastanza evidente. Nella definizione di ottimo solo quella coppia (eventualmente non unica) che realizza il valore $\tau^* = \max_{ij} |q_{ij} - s_{ij}|$ ha un valore unico di seggi. Tutte le altre coppie possono assumere qualsiasi valore purché la loro deviazione non ecceda τ^*. Si riconsideri l'Esempio 9, i cui dati sono riportati qui sotto

$$q = \begin{pmatrix} 0.992 & 0.870 & 0.170 & 0.994 & 0.988 & 0.986 \\ 0.460 & 0.580 & 0.991 & 0.993 & 0.989 & 0.987 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.986 & 0.001 & 0.010 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.440 & 0.001 & 0.556 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.140 & 0.856 & 0.001 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Esistono 18 allocazioni ottime che producono lo stesso valore $\tau^* = 1.006$ dovuto alla coppia $(1,4)$ per la quale si ha $s_{14} = 2$. Si è già discusso come sia impossibile avere un'allocazione che non violi le quote e quindi la deviazione minima si ottiene se la violazione delle quote avviene per la coppia $(1,4)$. A questo punto gli altri seggi possono essere arrotondati a 1 o a 0 indifferentemente (ma sempre rispettando il vincolo di somma) senza alterare il massimo valore e quindi sono tutte soluzioni ottime. Fra le 18 soluzioni riportiamo le due seguenti

$$s^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad s^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Anche se sono allocazioni equivalenti dal punto di vista della minimizzazione della norma L_∞, non sono evidentemente equivalenti dal punto di vista della proporzionalità rispetto alle quote. In s^1 si assegna un seggio a fronte di una quota di 0.170 (coppia (1,3)) e non si assegna un seggio a fronte di una quota 0.992 (coppia (1,1)). L'allocazione s^2 è molto più equilibrata ed è certamente preferibile a s^1. Siccome un algoritmo progettato per minimizzare una funzione produce una soluzione sola fra le diverse eventualmente disponibili, bisognerebbe poter specificare formalmente quale soluzione sia preferibile.

Consideriamo le seguenti definizioni. Dati due vettori $a \in R^n$ e $b \in R^n$, a si dice *lessicograficamente minore* di b, $a \prec b$, se esiste $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tale che

$$a_i = b_i, \quad i < k, \qquad a_k < b_k$$

Se non avviene $a \prec b$ e neppure $b \prec a$ allora necessariamente $a = b$. Si tratta quindi di un ordine totale. Ora sia $\theta(a)$ il vettore ottenuto da a ordinando in modo non crescente i suoi elementi. Il vettore a si dice *minore in senso lessicografico non ordinato* di b, $a \prec_L b$, se $\theta(a) \prec \theta(b)$. In questo caso però se non avviene $a \prec_L b$ e neppure $b \prec_L a$, non si deduce $a = b$, in quanto a e b potrebbero avere le stesse componenti ma permutate in modo diverso. In questo caso i due vettori pur essendo diversi sono equivalenti dal punto di vista dell'ordinamento e scriviamo $a \sim_L b$. Se si ha $a \prec_L b$ oppure $a \sim_L b$ scriviamo $a \preceq_L b$. L'ordine introdotto con questa seconda definizione non è più un ordine totale, ma solo un preordine totale. Ad esempio

$$\left.\begin{array}{ll} a = (\,4 \quad 1 \quad 6 \quad 3\,), & \theta(a) = (\,6 \quad 4 \quad 3 \quad 1\,) \\ b = (\,6 \quad 2 \quad 2 \quad 4\,), & \theta(b) = (\,6 \quad 4 \quad 2 \quad 2\,) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad b \prec_L a$$

$$\left.\begin{array}{ll} a = (\,4 \quad 1 \quad 6 \quad 3\,), & \theta(a) = (\,6 \quad 4 \quad 3 \quad 1\,) \\ b = (\,6 \quad 3 \quad 1 \quad 4\,), & \theta(b) = (\,6 \quad 4 \quad 3 \quad 1\,) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad b \sim_L a$$

Applichiamo questi concetti ai valori $\tau_{ij}(s) = |q_{ij} - s_{ij}|$ che pensiamo disposti come un unico vettore $\tau(s)$ con $m\,n$ componenti.

Definizione 6. Un'allocazione s^* si dice *lexicominima* se $\tau(s^*) \preceq_L \tau(s)$ per ogni allocazione s. ∎

L'allocazione s^1 dell'esempio precedente non è lexicominima. Infatti si ha

$$\tau(s^1) = \begin{pmatrix} 0.992 & 0.870 & 0.830 & 1.006 & 0.012 & 0.014 \\ 0.540 & 0.420 & 0.991 & 0.007 & 0.011 & 0.013 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.014 & 0.001 & 0.010 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.440 & 0.001 & 0.444 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.140 & 0.144 & 0.001 \end{pmatrix}$$

$$\tau(s^2) = \begin{pmatrix} 0.008 & 0.870 & 0.170 & 1.006 & 0.012 & 0.014 \\ 0.460 & 0.420 & 0.009 & 0.007 & 0.011 & 0.013 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.014 & 0.001 & 0.010 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.440 & 0.001 & 0.444 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.140 & 0.144 & 0.001 \end{pmatrix}$$

Ordinando i valori si ha

$$\theta(\tau(s^1)) = (1.006,\ 0.992,\ 0.991,\ 0.870, \ldots)$$
$$\theta(\tau(s^2)) = (1.006,\ 0.870,\ 0.460,\ 0.444, \ldots)$$

da cui $\tau(s^2) \prec_L \tau(s^1)$. In particolare si può dimostrare che s^2 è lexicominima.

Un'allocazione lexicominima è robusta rispetto a proposte di cambiare l'allocazione: ogni altra allocazione, anche se migliora una deviazione $\bar{\tau}$ per una coppia diminuendone il valore deve necessariamente peggiorare la deviazione di un'altra coppia portandola ad un valore più elevato di $\bar{\tau}$ e quindi non è accettabile. Si consideri ad esempio l'allocazione

$$s^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La lista 2 potrebbe preferire l'allocazione s^3 con il seggio nel primo distretto anziché nel secondo, richiesta che avrebbe anche un senso considerate le quote $q_{12} = 0.870$ e $q_{22} = 0.580$. Però se si considerano gli errori $\tau(s^3)$ si ha

$$\tau(s^3) = \begin{pmatrix} 0.992 & 0.130 & 0.170 & 1.006 & 0.012 & 0.014 \\ 0.540 & 0.580 & 0.009 & 0.007 & 0.011 & 0.013 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.014 & 0.001 & 0.010 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.440 & 0.001 & 0.444 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.140 & 0.144 & 0.001 \end{pmatrix}$$

e, anche se τ_{12} è migliorato considerevolmente, passando da 0.870 a 0.130, questo però è avvenuto a scapito dell'errore τ_{11} che è passato da 0.008 a 0.992, un errore peggiore di 0.870 e pertanto non accettabile. Vedremo più avanti come sia possibile 'dimostrare' in modo convincente e con pochi prerequisiti matematici che non esiste nessuna allocazione che permetta di assegnare un seggio alla coppia $(1, 2)$ senza peggiorare oltre 0.870 le coppie che hanno deviazione inferiore a 0.870 e senza peggiorare le coppie che hanno deviazione superiore a 0.870.

Siccome l'ordine $\prec_L$ è un preordine le allocazioni lexicominime possono non essere uniche. Ad esempio

$$q = \begin{pmatrix} 1.3 & 1.4 & 1.3 \\ 1.6 & 1.7 & 0.7 \end{pmatrix},\ s^1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ s^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ s^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

per le quali abbiamo

$$\tau(s^1) = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 & 0.3 \\ 0.6 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad \tau(s^2) = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad \tau(s^3) = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.7 \\ 0.4 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

Si tratta di tre allocazioni che minimizzano la norma L_∞, però solo le prime due sono anche lexicominime, ovvero $\tau(s^1) \sim_L \tau(s^2) \prec_L \tau(s^3)$. La non unicità di un'allocazione lexicominima va vista come un fatto a probabilità trascurabile, dovuto all'uguaglianza delle parti frazionarie delle quote e dei loro complementi all'unità, come si può vedere dall'esempio che è stato costruito proprio sfruttando queste uguaglianze. Si può allora assumere che un'allocazione lexicominima sia sempre unica.

Il calcolo dell'allocazione lexicominima è abbastanza semplice ed è una semplice estensione dell'algoritmo che calcola l'allocazione di minima norma L_∞. Una volta calcolato il valore τ^* che supponiamo associato alla coppia (h,k), che possiamo chiamare *bloccante*, ovvero $\tau^* = |q_{hk} - s_{hk}|$, l'algoritmo non si ferma, ma procede a cercare allocazioni ammissibili per valori $\tau < \tau^* = \tau^0$, *lasciando però inalterato l'intervallo di capacità* per l'arco (h,k) al valore precedente, cioè

$$\lceil q_{hk} - \tau^0 \rceil^+ \leqslant s_{hk} \leqslant \lfloor q_{hk} + \tau^0 \rfloor$$

La ricerca del minimo valore τ^1 può essere eseguita nuovamente con ricerca binaria oppure per scansione verso il basso delle deviazioni rilevanti. L'algoritmo quindi si ferma quando trova il minimo valore τ^1 per cui esiste un'allocazione ammissibile. Se la coppia bloccante associata al valore τ^1 è la coppia (u,v), l'algoritmo procede abbassando ulteriormente τ ma, nuovamente, fissando l'intervallo di capacità per l'arco (u,v) al valore

$$\lceil q_{uv} - \tau^1 \rceil^+ \leqslant s_{uv} \leqslant \lfloor q_{uv} + \tau^1 \rfloor$$

L'algoritmo continua in modo iterativo producendo una serie di coppie bloccanti e di valori $\tau^2 > \tau^3 > \ldots > \tau$, finché $\tau < 1/2$. A questo punto è evidente che l'errore non può essere ulteriormente abbassato e l'algoritmo termina.

Esempio 18. Applichiamo questi risultati ai dati dell'Esempio 14. Usando le quote regionali che qui riportiamo (arrotondate con il vincolo sulla somma)

$$q = \begin{pmatrix} 4.506 & 3.044 & 3.646 & 4.804 \\ 7.992 & 2.012 & 4.823 & 5.173 \\ 0.845 & 2.239 & 6.916 & 6.000 \\ 5.169 & 5.732 & 5.959 & 4.140 \\ 21.233 & 0.288 & 3.235 & 2.244 \end{pmatrix}$$

e applicando l'algoritmo che calcola un'allocazione di norma L_∞ minima si ottiene l'allocazione

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 & 5 \\ 7 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 8 & 5 \\ 4 & 6 & 6 & 5 \\ 21 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

con la coppia $(4,1)$ che dà luogo alla massima deviazione $\tau^0 = 1.16897$, dovuta a 4 seggi contro una quota 5.16897. Proseguendo l'algoritmo per calcolare l'allocazione lexicominima, si trovano in successione le coppie bloccanti e valori τ corrispondenti

$$(2,1)\ \tau^1 = 0.9920; \quad (2,2)\ \tau^2 = 0.9883; \quad (1,2)\ \tau^3 = 0.9556; \quad (4,4)\ \tau^4 = 0.8601; \quad (3,1)\ \tau^5 = 0.8455;$$
$$(1,4)\ \tau^6 = 0.8035; \quad (3,2)\ \tau^7 = 0.7614; \quad (5,2)\ \tau^8 = 0.7117; \quad (1,1)\ \tau^9 = 0.5059$$

A questo punto l'errore è inferiore a $1/2$ e l'algoritmo termina producendo l'allocazione lexicominima s^L (a fianco per confronto le allocazioni di minima norma L_1 e L_2)

$$s^L = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 7 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 7 & 6 \\ 4 & 6 & 6 & 5 \\ 21 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad s^1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 5 \\ 7 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 7 & 6 \\ 5 & 6 & 6 & 4 \\ 21 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad s^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 7 & 6 \\ 4 & 7 & 6 & 4 \\ 21 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\|s^L - q\|_1 &= 10.40140, & \|s^1 - q\|_1 &= 9.07404, & \|s^2 - q\|_1 &= 9.16286 \\
\|s^L - q\|_2^2 &= 8.11871, & \|s^1 - q\|_2^2 &= 7.46520, & \|s^2 - q\|_2^2 &= 7.41521 \\
\|s^L - q\|_\infty &= 1.16897, & \|s^1 - q\|_\infty &= 1.50591, & \|s^2 - q\|_\infty &= 1.16897
\end{aligned}$$

Usando le quote fair share l'allocazione lexicomin risulta essere

$$s^L = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 & 5 \\ 7 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & 7 & 6 \\ 4 & 7 & 6 & 4 \\ 21 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad s^1 = s^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 & 5 \\ 7 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 7 & 5 \\ 4 & 7 & 6 & 4 \\ 20 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\|s^L - q\|_1 &= 5.79855, & \|s^1 - q\|_1 &= 5.5457, \\
\|s^L - q\|_2^2 &= 2.43141, & \|s^1 - q\|_2^2 &= 2.17856, \\
\|s^L - q\|_\infty &= 0.6924937, & \|s^1 - q\|_\infty &= 0.701675,
\end{aligned}$$

∎

Anche allocazioni ottime per le norme L_1 e L_2 possono non essere uniche. Mentre la non unicità per la norma L_2 può verificarsi solo in seguito alla coincidenza delle parti frazionarie delle quote e quindi si tratta di una circostanza molto improbabile, la situazione per la norma L_1 è più critica. In [23] si riporta il seguente esempio.

Esempio 19. Siano date le quote regionali

$$q = \begin{pmatrix} 7.574 & 9.181 & 3.349 & 0.114 & 8.782 \\ 8.610 & 1.288 & 0.926 & 0.595 & 8.581 \\ 2.900 & 4.592 & 3.354 & 3.108 & 2.046 \end{pmatrix}$$

con i valori

$$R = (\,29 \quad 20 \quad 16\,), \qquad P = (\,18 \quad 12 \quad 14 \quad 12 \quad 9\,)$$

Le seguenti due allocazioni

$$s^1 = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 8 & 7 & 0 \\ 8 & 1 & 2 & 1 & 8 \\ 3 & 4 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad s^2 = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 9 & 1 & 3 \\ 8 & 1 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

sono entrambe ottime per la norma L_1. Si noti che il numero di seggi per la coppia $(1,4)$ varia da 7 a 1. Sono inoltre ottenibili altre allocazioni ottime con i valori intermedi di seggi per la coppia $(1,4)$.

∎

Nell'esempio i valori P sono molto anomali rispetto alle quote e non è costruibile una matrice dei voti dalla quale si ottengano i valori P. Tuttavia l'esempio dimostra come l'unicità possa non essere garantita in generale. Probabilmente in casi reali allocazioni multiple non presentano una variabilità di valori di seggi così ampia come nell'esempio, ma tuttavia basta la presenza di due soluzioni equivalenti a creare un problema in fase di allocazione. Si fa vedere in [23] come possano esistere ottimi multipli quando vi sono più coppie (i,j) la cui allocazione di seggi violi le quote. Se l'allocazione non viola le quote, allora è unica. Allora l'applicazione della norma L_1 alle quote fair share produce un'allocazione unica.

17 Allocazioni ottime certificate

I precedenti capitoli hanno mostrato come sia complesso trovare un'allocazione di seggi e come sia quasi impossibile progettare un metodo che sia al tempo stesso così semplice da essere comprensibile all'elettore qualunque ma anche esente da malfunzionamenti. Per uscire da questo dilemma è stata proposta in [29] l'idea di *certificato di ottimalità*. Si tratta di calcolare l'allocazione tramite un algoritmo anche sofisticato e certamente comprensibile solo a matematici esperti, ma al tempo stesso produrre un certificato, la cui verifica sia invece alla portata dell'elettore comune e possa convincerlo della correttezza dell'allocazione proposta.

Nel seguito chiameremo 'Risolutore' colui che effettivamente calcola l'allocazione lexicominima e 'Verificatore' colui che deve verificare la validità della soluzione proposta dal Risolutore. Al fine della verifica della validità il Risolutore deve anche produrre un *certificato*. Il Verificatore deve innanzitutto constatare, tramite semplici somme, che l'allocazione soddisfa i requisiti di un'allocazione biproporzionale. Poi per quel che riguarda la pretesa ottimalità deve, sulla base di un ragionamento elementare e di un semplice calcolo che coinvolge sia la soluzione che il certificato si convince che la soluzione proposta è davvero ottima.

Il tipo di certificato che il Risolutore deve produrre, e il tipo di ragionamento e di calcolo richiesti al Verificatore variano a seconda del tipo di ottimalità che viene richiesta all'allocazione. Presentiamo il caso di norma L_∞ (descritto in dettaglio in [29]), il caso di norma L_p con vincolo di non violazione delle quote (cosiddetto 'Controlled rounding') e il caso di norma L_1 senza vincolo di non violazione delle quote.

Per la minimizzazione della norma L_∞ il certificato consiste in un sottoinsieme D di distretti e un sottoinsieme L di liste. Indichiamo con $\overline{D}$ e $\overline{L}$ i rispettivi insiemi complementari. I sottoinsiemi D e L, assieme all'allocazione ottima s^* e alla deviazione ottima τ^* permettono al Verificatore di verificare la validità della soluzione, ovvero che non esistono allocazioni con deviazione massima inferiore a τ^*.

Le competenze matematiche richieste al Verificatore sono molto limitate. Il Verificatore deve

(1) saper eseguire somme e moltiplicazioni;

(2) saper dire se due numeri sono uguali oppure quale dei due è il minore;

(3) conoscere il significato di $\lfloor a \rfloor$, $\lceil a \rceil$ e a^+ per un dato numero a ed essere convinto dei seguenti fatti:

   (a) per ogni numero a, $\lfloor a \rfloor \leqslant a$ e $\lceil a \rceil \geqslant a$,

   (b) se x è un intero, allora $a \leqslant x \leqslant b$ se e solo se $\lceil a \rceil \leqslant x \leqslant \lfloor b \rfloor$,
   se x è un intero non negativo, allora $a \leqslant x \leqslant b$ se e solo se
   $\lceil a \rceil^+ \leqslant x \leqslant \lfloor b \rfloor$,

   (c) se a e b sono numeri tali che $a \leqslant b$, allora
   $\lfloor a \rfloor \leqslant \lfloor b \rfloor$ e $\lceil a \rceil \leqslant \lceil b \rceil$ (è implicato da (a) e (b)),

   (d) se b è intero e $b' < b$, allora $\lfloor b' \rfloor \leqslant b - 1$,
   se a è intero e $a' > a$, allora $\lceil a' \rceil \geqslant a + 1$.

A questo punto il Verificatore deve, come prima cosa,

– verificare che veramente $\sum_i s^*_{ij} = P_j$, $\sum_j s^*_{ij} = R_i$, $s^*_{ij} = 0$ se $\nu_{ij} = 0$ e $\tau^* = \max_{ij} |s^*_{ij} - q_{ij}|$, ovvero che s^* è un'allocazione ammissibile e che la deviazione è quella dichiarata.

Successivamente, per essere convinto che non esiste alcuna allocazione con deviazione $\tau < \tau^*$, deve, scelto un valore arbitrario $\tau < \tau^*$:

– calcolare $\alpha_{ij} := \lceil q_{ij} - \tau \rceil^+$, con $i \in \overline{D}$ e $j \in L$, $\beta_{ij} := \lfloor q_{ij} + \tau \rfloor$, con $i \in D$ e $j \in \overline{L}$, se $\nu_{ij} > 0$ (altrimenti $\alpha_{ij} = \beta_{ij} = 0$ se $\nu_{ij} = 0$);

– calcolare $\hat{\alpha} := \sum_{i \in \overline{D}} \sum_{j \in L} \alpha_{ij}$ e $\hat{\beta} := \sum_{i \in D} \sum_{j \in \overline{L}} \beta_{ij}$.

e ragionare come segue:

– se la massima deviazione in valore assoluto rispetto alle quote è τ, allora ogni valore di seggio s_{ij} deve essere contenuto nell'intervallo $[q_{ij} - \tau, q_{ij} + \tau]$, che, data l'interezza dei seggi, può essere ulteriormente ristretto a $[\lceil q_{ij} - \tau \rceil^+, \lfloor q_{ij} + \tau \rfloor] = [\alpha_{ij}, \beta_{ij}]$;

– se esiste un'allocazione s con massima deviazione τ, allora il massimo numero di seggi che può essere allocato alle liste in $\overline{L}$ nei distretti in D è $\hat{\beta}$ e di conseguenza il minimo numero di seggi che può essere allocato alle liste in L nei distretti in D è $\sum_{i \in D} r_i - \hat{\beta}$

– analogamente, il minimo numero di seggi che può essere allocato alle liste in L nei distretti in $\overline{D}$ è $\hat{\alpha}$ e di conseguenza il massimo numero di seggi che può essere allocato alle liste in L nei distretti in D è $\sum_{j \in L} p_j - \hat{\alpha}$

– infine, se

$$\sum_{j \in L} P_j - \hat{\alpha} < \sum_{i \in D} R_i - \hat{\beta}$$

cioè se il massimo numero di seggi è inferiore al minimo numero di seggi, allora un'allocazione con deviazione τ non può esistere. Inoltre è anche impossibile che esista un'allocazione con deviazione massima inferiore a τ dato che $\hat{\beta}$ diminuisce e $\hat{\alpha}$ aumenta se τ diminuisce.

In questa successione di calcoli e ragionamenti solo le competenze matematiche elencate sono necessarie più un ragionamento matematico elementare. Il fatto importante è che le tecniche per calcolare l'allocazione ottima possono essere totalmente ignorate dal Verificatore.

Esempio 20.

Vogliamo 'verificare' che l'allocazione dell'Esempio 18 è effettivamente ottima (seconda la norma L_∞). La deviazione massima è ottenuta per la coppia $(4, 1)$ con un errore $\tau^0 = 1.16897$. Il certificato che viene fornito è $D = \emptyset$, $\overline{D} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $L = \{1\}$, $\overline{L} = \{2, 3, 4\}$. Essendo $D = \emptyset$ il confronto viene fatto direttamente sui valori α_{ij} e sui seggi da allocare ai partiti in L. Dovendo cercare una soluzione con errore inferiore a quello dichiarato minimo devono essere allocati almeno 5 seggi alla coppia $(4, 1)$. Si vede che

$$\alpha_{11} = 4, \quad \alpha_{21} = 7, \quad \alpha_{31} = 0, \quad \alpha_{41} = 5, \quad \alpha_{51} = 21$$

da cui $\hat{\alpha} = 37$, cioè i seggi da allocare alla lista 1 (l'unica in L) devono essere almeno 37. Però i seggi da allocare alla lista 1 sono 36 e quindi è impossibile avere un'allocazione con errore minore.

∎

Si è ampiamente discusso nella Sezione 16 che un'allocazione che minimizza la norma L_∞ può non essere soddisfacente. A questo scopo si è introdotto il concetto di allocazioni lexicomin. Quindi bisogna anche essere in grado di 'provare' che un'allocazione è anche lexicomin. Per ottenere una tale certificazione è stato proposto in [29] di produrre un *certificato individuale* per ognuna delle coppie bloccanti che vengono ottenute durante la procedura lexicomin. Anche il certificato individuale per la particolare coppia (h, k) consiste in un sottoinsieme D di distretti e in un sottoinsieme L di liste (entrambi dipendenti dalla particolare coppia). Differisce però nel modo con cui vengono calcolati i valori α_{ij} e β_{ij}. Infatti le deviazioni τ_{ij} vengono definite nel seguente modo

$$\tau_{hk} < \tau^*_{hk}, \quad \tau_{ij} := \tau^*_{hk},\ (i,j) \neq (h,k) : \tau^*_{ij} \leqslant \tau^*_{hk}, \quad \tau_{ij} := \tau^*_{ij},\ (i,j) : \tau^*_{ij} > \tau^*_{hk} \tag{26}$$

Quindi, nel momento in cui si cerca di abbassare la deviazione per la coppia (h, k), si permette alle coppie che hanno una deviazione migliore di peggiorare, ma non più del valore τ^*_{hk}, mentre le coppie che hanno una deviazione peggiore di τ^*_{hk} non possono peggiorare ulteriormente.

La motivazione che sta alla base di questa particolare definizione è la seguente: bisogna dimostrare che, abbassando la deviazione per la coppia (h, k), non esistono altre allocazioni migliori in senso lessicografico non ordinato. Un'allocazione migliore dovrebbe avere una deviazione non superiore a τ^*_{ij} per tutte le coppie (i, j) con deviazione superiore a τ^*_{hk}. Per ciò che riguarda le coppie con deviazione minore o uguale a quella di (h, k) qualche coppia potrebbe peggiorare la deviazione, purché il valore non ecceda τ^*_{hk}. È difficile esprimere correttamente un vincolo per queste coppie in quanto l'ordinamento dipende dalla successione ordinata dei valori τ_{ij} e questa varia per ogni ordinamento. Ad esempio si consideri il vettore $\tau^* = (6, 4, 10, 5, 9)$ e si supponga di voler abbassare $\tau^*_1 = 6$ al valore $\tau_1 = 5$. Supponiamo che questo sia possibile e che esista il vettore $\tau = (5, 5, 10, 6, 9)$. Si noti che $\tau_h \leqslant \tau^*_h$ per quegli indici h per cui $\tau^*_h > \tau^*_1$, mentre $\tau_h \leqslant \tau^*_1$ per quegli indici $h \neq 1$ per cui $\tau^*_h \leqslant \tau^*_1$. Tuttavia $\tau^* \prec_L \tau$. Quindi il vettore τ, pur rispettando i vincoli (26), non è migliore di τ^*. Il fatto importante però è che, se esiste un'allocazione migliore, questa deve certamente soddisfare i vincoli (26), e quindi se non esistono allocazioni che soddisfano (26), non possono nemmeno esistere allocazioni migliori.

Dai valori τ_{ij} si calcolano

$$\alpha_{ij} := \lceil q_{ij} - \tau_{ij} \rceil^+, \quad i \in \overline{D}, j \in L, \qquad \beta_{ij} := \lfloor q_{ij} + \tau_{ij} \rfloor, \quad i \in D, j \in \overline{L}$$

e il resto procede come nel caso generale.

Esempio 21. Si supponga che, relativamente all'allocazione lexicomin dell'Esempio 18, la lista 4 non trovi giusta l'allocazione di 4 seggi nel primo distretto in quanto, avendo una quota di 4.804, ritenga più corretta un'allocazione di 5 seggi. Dobbiamo 'dimostrare' che una tale allocazione non può esistere, all'interno delle regole sopra descritte. In questo caso il certificato è

$$D = \{4\}, \quad \overline{D} = \{1, 2, 3, 5\}, \qquad L = \{1, 4\}, \qquad \overline{L} = \{2, 3\}$$

In base all'allocazione lexicomin i valori delle deviazioni sono

$$\tau^* = \begin{pmatrix} 0.506 & 0.956 & 0.354 & 0.804 \\ 0.992 & 0.988 & 0.176 & 0.173 \\ 0.845 & 0.761 & 0.084 & 0.000 \\ 1.169 & 0.268 & 0.041 & 0.860 \\ 0.233 & 0.712 & 0.234 & 0.244 \end{pmatrix}$$

Siccome stiamo valutando la cella $(1,4)$ dobbiamo fare riferimento al valore $\tau^*_{1,4} = 0.804$. I valori di deviazione τ che definiscono gli intervalli sono, in base a (26):

$$\tau = \begin{pmatrix} 0.804 & 0.956 & 0.804 & 0.804 \\ 0.992 & 0.988 & 0.804 & 0.804 \\ 0.845 & 0.804 & 0.804 & 0.804 \\ 1.169 & 0.804 & 0.804 & 0.860 \\ 0.804 & 0.804 & 0.804 & 0.804 \end{pmatrix}$$

che insieme ai valori delle quote

$$q = \begin{pmatrix} 4.506 & 3.044 & 3.646 & 4.804 \\ 7.992 & 2.012 & 4.823 & 5.173 \\ 0.845 & 2.239 & 6.916 & 6.000 \\ 5.169 & 5.732 & 5.959 & 4.140 \\ 21.233 & 0.288 & 3.235 & 2.244 \end{pmatrix}$$

permettono di calcolare

$$\alpha_{11} = 4,\ \alpha_{14} = 5,\ \alpha_{21} = 7,\ \alpha_{24} = 5,\ \alpha_{31} = 0,\ \alpha_{34} = 6,\ \alpha_{51} = 21, ; \alpha_{54} = 2$$

da cui $\hat{\alpha} = 50$ e

$$\beta_{42} = 6,\ \beta_{43} = 6$$

da cui $\hat{\beta} = 12$. Allora il minimo numero di seggi da allocare per le liste $\{1,4\}$ nel distretto $\{4\}$ è

$$\sum_{i \in D} R_i - \hat{\beta} = 21 - 12 = 9$$

mentre il massimo numero di seggi da allocare sempre per le liste $\{1,4\}$ nel distretto $\{4\}$ è

$$\sum_{j \in L} P_j - \hat{\alpha} = 58 - 50 = 8$$

da cui la contraddizione. ∎

Un modo di certificare la soluzione ottima può essere fornito anche con la minimizzazione delle altre norme. La cosa è possibile perché, come si è visto, pur trattandosi di risolvere un problema a numeri interi, si riesce a modellare il problema con la programmazione lineare e quindi una certificazione proveniente dal problema duale è sempre disponibile. Tuttavia non si può chiedere al Verificatore di conoscere la teoria della dualità e quindi di convincersi dell'ottimalità dai teoremi di dualità forte. Bisogna riformulare la dualità forte con concetti elementari come è stato fatto per la norma L_∞.

Vediamo come questo sia possibile per la norma L_p con il vincolo che l'allocazione non violi le quote. Il modello di Programmazione Lineare è il Controlled Rounding (24). Si immagini di avere una tabella corrispondente alle coppie distretti-liste. La tabella va riempita di 0 e 1 in modo che nella riga i ci siano $\bar{R}_i$ uni e nella colonna j ci siano $\bar{P}_j$ uni. Ad ogni casella della tabella corrisponde il costo d_{ij}. Questo costo misura di quanto peggiora l'allocazione se nella casella si mette 1 anziché 0. Se si lascia 0 la deviazione vale

$$(q_{ij} - \lfloor q_{ij} \rfloor)^p = (\langle q_{ij} \rangle)^p$$

Se si mette 1 la deviazione vale

$$(\lceil q_{ij} \rceil - q_{ij})^p = (1 - \langle q_{ij} \rangle)^p$$

Quindi la differenza fra mettere 1 e lasciare 0 è (valore che può essere anche negativo)

$$d_{ij} = (1 - \langle q_{ij} \rangle)^p - (\langle q_{ij} \rangle)^p$$

per cui, se nella casella viene messo 1, si incorre nel costo d_{ij} altrimenti non c'è costo.

Al Verificatore, oltre a comprendere il significato dei costi d_{ij} appena introdotti, viene anche richiesto di comprendere la seguente osservazione: se avessimo a disposizione un'allocazione di 0 e 1 e nelle caselle contenenti 1 ci fossero dei costi nulli o negativi e nelle caselle contenenti 0 ci fossero costi nulli o positivi, l'allocazione sarebbe certamente ottima. Infatti il valore minimo dell'espressione

$$\sum_{i,j} d_{ij}\, x_{ij}$$

per qualsiasi valore $x_{ij} \in \{0, 1\}$, quindi tralasciando i vincoli $\sum_i x_{ij} = \bar{P}_j$ e $\sum_j x_{ij} = \bar{R}_i$, è dato da $x_{ij} = 1$ se $d_{ij} < 0$ e $x_{ij} = 0$ se $d_{ij} > 0$. Se $d_{ij} = 0$ il valore di x_{ij} può essere indifferentemente 0 o 1. Se inoltre questi valori x_{ij} soddisfano i vincoli di somma, allora sono necessariamente l'allocazione ottima.

Naturalmente non ci aspettiamo che i costi d_{ij} e i valori x_{ij} soddisfino in generale questa proprietà, però possiamo, se l'allocazione è ottima e senza alterare il problema, modificare i costi in modo che la proprietà sia soddisfatta.

L'osservazione cruciale, la cui comprensione viene richiesta al Verificatore, è che il problema non cambia se i costi di una riga qualsiasi vengono tutti modificati della stessa quantità. Siccome il numero di uni da allocare nella riga è fissato, tutte le possibili allocazioni cambiano il loro costo della stessa quantità e quindi l'allocazione ottima per il costo originale rimane ottima anche per il costo modificato. La stessa considerazione può essere fatta per i costi di una qualsiasi colonna. Quindi assegnati numeri u_i, e v_j l'allocazione ottima per i costi, che chiameremo *costi ridotti*,

$$d'_{ij} = d_{ij} - u_i - v_j$$

è la stessa allocazione ottima per i costi d_{ij}. Formalmente si ha:

$$\sum_{i,j} d'_{ij}\, x_{ij} = \sum_{i,j} (d_{ij} - u_i - v_j)\, x_{ij} = \sum_{i,j} d_{ij}\, x_{ij} - \sum_i u_i \sum_j x_{ij} - \sum_j v_j \sum_i x_{ij} =$$

$$\sum_{i,j} d_{ij}\, x_{ij} - \sum_i u_i\, \bar{R}_i - \sum_j v_j\, \bar{P}_j$$

dove si vede che la differenza fra i costi e i costi ridotti è costante per ogni allocazione x e vale $\sum_i u_i\, \bar{R}_i + \sum_j v_j\, \bar{P}_j$. L'esistenza di numeri u_i e v_j per cui, se e solo se x è ottimo, si ha

$$d_{ij} - u_i - v_j < 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{ij} = 1, \qquad d_{ij} - u_i - v_j > 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{ij} = 0 \tag{27}$$

è garantita dal Teorema di Complementarità della Programmazione lineare. Tuttavia, il Verificatore non è tenuto a conoscere l'esistenza di tale teorema. Il Risolutore fornisce al Verificatore la soluzione x_{ij} e i numeri u_i e v_j. Questi valori costituiscono il certificato. Il Verificatore deve essere convinto della correttezza del ragionamento per cui un'allocazione ottima per i costi d_{ij} è ottima anche per i costi ridotti d'_{ij} (e questo indipendentemente dai valori u_i e v_j) e poi che le condizioni (27) garantiscono l'ottimalità.

Esempio 22. Si considerino i dati dell'Esempio 14 con la soluzione fornita nell'Esempio 18 relativa alla norma L_2 e alle quote fair shares. Le quote arrotondate sono

$$q = \begin{pmatrix} 3.769 & 3.914 & 3.655 & 4.662 \\ 6.990 & 2.705 & 5.056 & 5.249 \\ 0.692 & 2.818 & 6.788 & 5.702 \\ 4.187 & 7.138 & 5.784 & 3.891 \\ 20.361 & 0.425 & 3.717 & 2.497 \end{pmatrix}$$

per cui si allocano inizialmente i seggi

$$\lfloor q \rfloor = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 5 \\ 4 & 7 & 5 & 3 \\ 20 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Vogliamo verificare che l'allocazione ottima è data da

$$s = \lfloor q \rfloor + x = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 5 \\ 4 & 7 & 5 & 3 \\ 20 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 & 5 \\ 7 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 7 & 5 \\ 4 & 7 & 6 & 4 \\ 20 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

I costi d_{ij} come calcolati in (24) (con $p = 2$) sono

$$d = \begin{pmatrix} -0.53808 & -0.82878 & -0.30992 & -0.32335 \\ -0.98043 & -0.40916 & 0.88802 & 0.50156 \\ -0.38499 & -0.63655 & -0.57541 & -0.40335 \\ 0.62576 & 0.72437 & -0.56898 & -0.78139 \\ 0.27774 & 0.15012 & -0.43370 & 0.00653 \end{pmatrix}$$

Il certificato consiste, oltre che nella tabella x_{ij} scritta sopra, nei due vettori

$$u = (\, -0.14439 \quad 0 \quad -0.40988 \quad 0 \quad 0 \,), \qquad v = (\, 0.02489 \quad -0.22667 \quad -0.16553 \quad 0.00653 \,)$$

da cui si ricavano i costi ridotti

$$d' = \begin{pmatrix} -0.41859 & -0.45771 & 0 & -0.18549 \\ -1.00532 & -0.18248 & 1.05355 & 0.49503 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.60087 & 0.95104 & -0.40345 & -0.78792 \\ 0.25285 & 0.37679 & -0.26817 & 0 \end{pmatrix}$$

A questo punto il Verificatore deve semplicemente constatare che le relazioni (27) sono soddisfatte.

∎

Un certificato simile, ma un po' più complicato può essere prodotto anche per un'allocazione che minimizzi la norma L_1 senza il vincolo di non violare le quote. Per questo problema ci si riferisce al modello di Programmazione Lineare (20). In questo caso dobbiamo costruire tre tabelle. Indichiamo con $(i,j)^1$, $(i,j)^2$ e $(i,j)^3$ le caselle relative alla coppia distretto-lista (i,j) nelle tre rispettive tabelle. Nella casella $(i,j)^1$ deve essere indicata un'allocazione ξ^1_{ij} di seggi vincolata a $0 \leqslant \xi^1_{ij} \leqslant \lfloor q_{ij} \rfloor$. Nella casella $(i,j)^2$ deve essere indicata un'allocazione di seggi $\xi^2_{ij} \in \{0,1\}$ e nella casella $(i,j)^3$ deve essere un'allocazione di seggi $\xi^3_{ij} \geqslant 0$. L'allocazione per la coppia (i,j) è $s_{ij} = \xi^1_{ij} + \xi^2_{ij} + \xi^3_{ij}$. Si noti che affinché ci sia coerenza fra l'allocazione calcolata come somma dei tre termini e la valutazione del suo costo come discussa qui sotto, deve essere $\xi^2_{ij} > 0 \Longrightarrow \xi^1_{ij} = \lfloor q_{ij} \rfloor$ e $\xi^3_{ij} > 0 \Longrightarrow \xi^2_{ij} = 1$, cioè ξ^2_{ij} può avere un valore positivo solo dopo che ξ^1_{ij} ha raggiunto il valore di saturazione $\lfloor q_{ij} \rfloor$ e analogamente ξ^3_{ij} può avere un valore positivo solo dopo che ξ^2_{ij} ha raggiunto il valore di saturazione 1 (e necessariamente anche ξ^1_{ij} ha raggiunto il valore di saturazione).

Per valutare i costi il Verificatore deve ragionare come segue: se $s_{ij} = 0$ il costo dell'allocazione è q_{ij}. Questo è un termine invariante per ogni allocazione e può quindi non entrare nella valutazione del costo di un'allocazione. Per ogni seggio allocato nella casella $(i,j)^1$ il costo è $d^1_{ij} = -1$. Infatti per ogni seggio allocato si ha un guadagno in quanto la deviazione da q_{ij} cala esattamente di uno per ogni seggio allocato. Nella casella $(i,j)^2$ si può allocare un seggio o nessuno. Passando da nessun seggio ad un seggio il costo aumenta della quantità $d^2_{ij} = 1 - 2\langle q_{ij} \rangle$. Nella casella $(i,j)^3$ per ogni seggio allocato il costo aumenta di $d^3_{ij} = 1$.

In questo caso l'invarianza sul numero di seggi da allocare riguarda l'insieme delle tre tabelle. Quindi il problema non cambia se i costi sulle tre righe corrispondenti delle tre tabelle vengono tutti variati della stessa quantità. Analogamente si possono cambiare della stessa quantità i costi su tre colonne corrispondenti. Allora, il Verificatore deve essere convinto che, dati valori u_i e v_j, i costi possono essere modificati nei costi ridotti

$$d^{1'}_{ij} = -1 - u_i - v_j, \qquad d^{2'}_{ij} = 1 - 2\langle q_{ij} \rangle - u_i - v_j, \qquad d^{3'}_{ij} = 1 - u_i - v_j$$

lasciando inalterata l'allocazione ottima. Inoltre il Verificatore deve essere convinto che un'allocazione ξ^h_{ij} tale che

$$\begin{array}{llllll} d^{1'}_{ij} < 0 & \Longrightarrow & \xi^1_{ij} = \lfloor q_{ij} \rfloor, & d^{1'}_{ij} > 0 & \Longrightarrow & \xi^1_{ij} = 0 \\ d^{2'}_{ij} < 0 & \Longrightarrow & \xi^2_{ij} = 1, & d^{2'}_{ij} > 0 & \Longrightarrow & \xi^2_{ij} = 0 \\ d^{3'}_{ij} < 0 & \Longrightarrow & \xi^3_{ij} = R_i - \lceil q_{ij} \rceil, & d^{3'}_{ij} > 0 & \Longrightarrow & \xi^3_{ij} = 0 \end{array} \tag{28}$$

è necessariamente ottima.

Esempio 23.

Riprendiamo l'Esempio 14 con la soluzione fornita nell'Esempio 18, questa volta però relativa alla norma L_1 (con possibile violazione della quota) e alle quote regionali che qui riportiamo (arrotondate con il vincolo sulla somma)

$$q = \begin{pmatrix} 4.506 & 3.044 & 3.646 & 4.804 \\ 7.992 & 2.012 & 4.823 & 5.173 \\ 0.845 & 2.239 & 6.916 & 6.000 \\ 5.169 & 5.732 & 5.959 & 4.140 \\ 21.233 & 0.288 & 3.235 & 2.244 \end{pmatrix}$$

Dalle quote si ricavano i dati

$$d^2 = 1 - 2\,\langle q\rangle = \begin{pmatrix} -0.012 & 0.911 & -0.292 & -0.607 \\ -0.984 & 0.977 & -0.647 & 0.654 \\ -0.691 & 0.523 & -0.831 & 0.999 \\ 0.662 & -0.465 & -0.917 & 0.720 \\ 0.534 & 0.423 & 0.531 & 0.512 \end{pmatrix}, \qquad \lfloor q \rfloor = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 6 \\ 5 & 5 & 5 & 4 \\ 21 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Il certificato consiste nelle allocazioni

$$\xi^1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 6 \\ 5 & 5 & 5 & 4 \\ 21 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \xi^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \xi^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e nei numeri

$$u = (\,0.477 \quad 0.477 \quad 0. \quad 0.477 \quad 0.477\,), \qquad v = (\,-1.478 \quad 0.523 \quad -0.769 \quad -1.\,)$$

da cui si ottengono i costi ridotti

$$d^{1'} = \begin{pmatrix} 0 & -2.000 & -0.708 & -0.477 \\ 0 & -2.000 & -0.708 & -0.477 \\ 0.477 & -1.523 & -0.231 & 0 \\ 0 & -2.000 & -0.708 & -0.477 \\ 0 & -2.000 & -0.708 & -0.477 \end{pmatrix}$$

$$d^{2'} = \begin{pmatrix} 0.988 & -0.089 & 0 & -0.084 \\ 0.016 & -0.023 & -0.355 & 1.177 \\ 0.786 & 0 & -0.062 & 1.999 \\ 1.662 & -1.465 & -0.625 & 1.243 \\ 1.534 & -0.577 & 0.824 & 1.035 \end{pmatrix}, \qquad d^{3'} = \begin{pmatrix} 2.000 & 0 & 1.292 & 1.523 \\ 2.000 & 0 & 1.292 & 1.523 \\ 2.477 & 0.477 & 1.769 & 2.000 \\ 2.000 & 0 & 1.292 & 1.523 \\ 2.000 & 0 & 1.292 & 1.523 \end{pmatrix}$$

che verificano le relazioni (28). ∎

18 Confronto fra i metodi

È interessante vedere quali risultati si ottengono applicando i diversi metodi ad un caso reale, quale quello delle elezioni politiche italiane del 24-25 febbraio 2013 per la Camera dei Deputati. In questa elezione si sono presentate 47 liste delle quali solo 10 hanno superato una delle soglie di sbarramento. Il meccanismo delle soglie è alquanto complicato e prevede una soglia del 4% per ogni lista e del 10% per ogni coalizione. Una lista collegata ad una coalizione che abbia superato il 10% è ammessa anche se è al di sotto del 4% ma con almeno il 2%. Inoltre la migliore lista sotto il 2% in una coalizione (cosiddetto miglior perdente) è comunque ammessa. Anche liste rappresentanti minoranze linguistiche come la Südtiroler Volkspartei sono comunque ammesse al riparto di seggi.

L'elenco delle liste ammesse è il seguente: della coalizione capeggiata da Bersani fanno parte il Partito Democratico (PD), Sinistra Ecologia e Libertà (SEL), il Centro Democratico (CD) e la Südtiroler Volkspartei (SVP) presente solo nel Trentino-Alto Adige dove invece il CD non si è presentato; della coalizione capeggiata da Berlusconi fanno parte il Popolo delle Libertà (PDL), la Lega Nord (LN) e i Fratelli d'Italia (FI) non presenti in Trentino-Alto Adige; della coalizione capeggiata da Monti fanno parte la Scelta Civica con Monti per l'Italia (SC) e l'Unione di Centro (UDC). Il Movimento 5 Stelle (M5S) si è presentato da solo. Si fa notare che le liste CD, FI e UDC erano sotto il 2% e sono state recuperate grazie al meccanismo del miglior perdente, mentre la lista SEL pur non avendo superato il 4% è stata ammessa perché superiore al 2% e all'interno di una coalizione ammessa. Nella Tabella 4 sono riportati i voti ottenuti dalle liste ammesse. Per il calcolo dei seggi da attribuire a livello nazionale ad una coalizione si conteggiano anche i voti delle liste non ammesse all'interno di una coalizione (non presenti nella tabella). Poi questi seggi sono ripartiti solo fra le liste ammesse. I voti invece delle liste singole che non hanno superato la soglia del 4% non compaiono da nessuna parte e di fatto è come se fossero voti mai espressi.

Senza il premio di maggioranza la coalizione di Centro Sinistra avrebbe avuto i seguenti seggi a livello nazionale: PD 169, SEL 21, CD 3, SVP 3. Grazie al premio di maggioranza i seggi sono invece diventati: PD 292, SEL 37, CD 6, SVP 5. Per gli altri partiti i seggi senza il premio di maggioranza sarebbero stati: PDL 144, LN 27, FI 13, M5S 170, SC 55, UDC 12. Invece i seggi assegnati sono stati: PDL 97, LN 18, FI 9, M5S 108, SC 37, UDC 8.

L'allocazione fornita dal metodo TT e dal metodo DAS (necessariamente uguali) sono riportate nella Tabella 5. Per questi due metodi non è necessario tener conto del premio di maggioranza in quanto questo è implicitamente contenuto nei seggi nazionali delle liste e il metodo automaticamente 'aggiusta' i seggi a livello locale per riportarli ai dati nazionali.

I metodi che minimizzano le distanze da quote ideali invece devono usare delle quote che tengono conto del premio di maggioranza. Se le quote sono le fair share, il doppio requisito di somma fa sì che le quote automaticamente riflettano il premio. Se invece le quote sono quelle regionali, bisogna 'ritoccarle' secondo il meccanismo descritto a pag. 35. Le quote usate per il confronto sono quelle stesse usate dal Ministero.

L'allocazione lexicomin con riferimento alle quote ministeriali è riportata in Tabella 6. L'allocazione che minimizza la norma L_1 e la norma L_2 (sempre rispetto alle quote ministeriali) è riportata in Tabella 7 mentre in Tabella 8 è riportata l'allocazione calcolata dal Ministero ed attualmente in vigore. Si notino i totali di riga evidenziati in grassetto e in rosso che sono diversi da quelli previsti per le circoscrizioni. È naturalmente l'effetto del baco dell'algoritmo ministeriale che ancora una volta non è stato in grado di terminare il calcolo in maniera corretta.

Il confronto fra le diverse allocazioni è riassunto nella Tabella 3 dove sono riportate le deviazioni dei seggi rispetto alle quote ministeriali valutate secondo diverse norme. Per le norme L_1 e L_2 è riportato anche il valore medio per cella rispetto alle celle non contenenti zero voti. Si noti che la soluzione fornita da TT e DAS viola le quote. Questo avviene per il PD nelle circoscrizioni della Campania 1 e Trentino-Alto Adige. L'allocazione ministeriale non viola le quote, ma. come si è detto, alterando i dati d'ingresso.

	$\|\cdot\|_\infty$	$\|\cdot\|_1$	$\|\cdot\|_1/\bar{Z}$	$\|\cdot\|_2^2$	$\|\cdot\|_2^2/\bar{Z}$	d.u.
lexicomin	0.7032	61.7816	0.2652	24.8218	0.1065	40
L_1, L_2	0.8864	60.8260	0.2612	23.8662	0.1024	28
distanza utopica	0.8931	61.4826	0.2639	24.5228	0.1052	24
DAS e TT	1.0653	64.9534	0.2788	28.1666	0.1209	36
ministeriale	0.9019	64.9462	0.2787	27.9864	0.1201	38

Tabella 3: Camera dei Deputati 2013: confronto fra le allocazioni

	PD	SEL	CD	SVP	PDL	LN	FI	M5S	SC	UDC	TOT
Abruzzo	175968	23825	4492	0	185522	1407	27693	232542	49806	13649	714904
Bas.	79696	18300	8006	0	59174	382	7397	75258	24437	8096	280746
Camp. 1	329542	52085	10084	0	450025	3197	31865	349681	98207	38166	1362852
Camp. 2	323468	47260	13590	0	415305	5633	57139	311684	102022	69736	1345837
Calabria	209897	39440	16348	0	223334	2205	12728	233169	51849	38446	827416
Em. Rom.	989660	77481	6068	0	434577	69097	35985	658443	211842	29561	2512714
F-VG	178149	17706	2320	0	134415	48461	12771	196218	77547	11675	679262
Lazio 1	654638	100699	7198	0	497757	3046	62588	687626	170442	31249	2215243
Lazio 2	196146	26761	2526	0	258587	2263	28896	241172	53783	18322	828456
Liguria	258763	29386	2353	0	174568	21861	13411	299966	78409	10565	889282
Lomb. 1	638331	68921	4295	0	477084	200234	34550	472158	258644	20454	2174671
Lomb. 2	580814	47086	5037	0	518701	442636	37349	462796	274782	31985	2401186
Lomb. 3	248016	19056	2902	0	196392	98120	17493	191193	78270	11782	863224
Molise	42599	10428	1269	0	39588	343	11168	52057	15968	3273	176693
Marche	256968	27740	3570	0	162475	6406	19992	298141	78235	16748	870275
Piem. 1	358741	49562	3814	0	237410	43966	26839	392724	139629	13963	1266648
Piem. 2	285094	26630	2790	0	269172	78397	39092	313573	130870	16762	1162380
Puglia	407900	144373	31852	0	638153	1457	34424	563243	172476	45437	2039315
Sardegna	232895	34079	5543	0	188480	1327	16233	274834	55990	25698	835079
Sic. 1	218658	24153	6555	0	306836	2002	15309	404945	60671	31593	1070722
Sic. 2	248752	27449	12526	0	359070	2748	23800	437672	68608	39288	1219913
Toscana	831400	84014	6886	0	388065	16216	40152	532875	153809	25532	2078949
T-AA	101224	23060	0	146804	66128	25360	0	88622	79439	4803	535440
Umbria	168820	16872	1505	0	102462	3077	14573	143004	41410	6805	498528
Ven. 1	363763	29950	3393	0	344643	194025	29945	458085	178618	29681	1632103
Ven. 2	264621	23093	2150	0	205049	116148	14438	317777	118302	14941	1076519
TOT	8644523	1089409	167072	146804	7332972	1390014	665830	8689458	2824065	608210	617

Tabella 4: Camera dei Deputati 2013: voti delle liste ammesse

	PD	SEL	CD	SVP	PDL	LN	FI	M5S	SC	UDC	TOT
Abruzzo	6	1	0	0	3	0	0	3	1	0	14
Bas.	3	1	0	0	1	0	0	1	0	0	6
Camp. 1	13	2	1	0	7	0	1	5	2	1	32
Camp. 2	12	2	1	0	6	0	1	4	1	1	28
Calabria	9	2	1	0	3	0	0	3	1	1	20
Em. Rom.	28	2	0	0	5	1	0	7	2	0	45
F-VG	6	1	0	0	2	1	0	2	1	0	13
Lazio 1	22	3	0	0	6	0	1	8	2	0	42
Lazio 2	7	1	0	0	3	0	1	3	1	0	16
Liguria	9	1	0	0	2	0	0	3	1	0	16
Lomb. 1	21	2	0	0	6	2	1	5	3	0	40
Lomb. 2	20	1	0	0	6	6	1	6	4	1	45
Lomb. 3	9	1	0	0	2	1	0	2	1	0	16
Molise	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	3
Marche	8	1	0	0	2	0	0	4	1	0	16
Piem. 1	12	1	0	0	3	1	0	4	2	0	23
Piem. 2	10	1	0	0	3	1	1	4	2	0	22
Puglia	15	5	2	0	9	0	1	7	2	1	42
Sardegna	8	1	0	0	3	0	0	4	1	0	17
Sic. 1	10	1	0	0	5	0	0	7	1	1	25
Sic. 2	10	1	1	0	6	0	0	7	1	1	27
Toscana	24	2	0	0	4	0	1	5	2	0	38
T-AA	2	1	0	5	1	0	0	1	1	0	11
Umbria	5	1	0	0	1	0	0	2	0	0	9
Ven. 1	13	1	0	0	5	3	0	6	2	1	31
Ven. 2	9	1	0	0	2	2	0	4	2	0	20
TOT	292	37	6	5	97	18	9	108	37	8	617

Tabella 5: Camera dei Deputati 2013: seggi da TT e DAS

	PD	SEL	CD	SVP	PDL	LN	FI	M5S	SC	UDC	TOT
Abruzzo	6	1	0	0	3	0	0	3	1	0	14
Bas.	3	1	0	0	1	0	0	1	0	0	6
Camp. 1	14	2	1	0	7	0	0	5	2	1	32
Camp. 2	12	2	1	0	6	0	1	4	1	1	28
Calabria	9	2	1	0	3	0	0	3	1	1	20
Em. Rom.	28	2	0	0	4	1	1	7	2	0	45
F-VG	6	1	0	0	2	1	0	2	1	0	13
Lazio 1	21	3	0	0	6	0	1	8	2	1	42
Lazio 2	7	1	0	0	3	0	1	3	1	0	16
Liguria	8	1	0	0	2	0	0	4	1	0	16
Lomb. 1	21	2	0	0	6	2	1	5	3	0	40
Lomb. 2	20	2	0	0	7	6	0	6	3	1	45
Lomb. 3	8	1	0	0	3	1	0	2	1	0	16
Molise	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	3
Marche	8	1	0	0	2	0	0	4	1	0	16
Piem. 1	12	1	0	0	3	1	0	4	2	0	23
Piem. 2	10	1	0	0	3	1	1	4	2	0	22
Puglia	15	5	1	0	9	0	1	8	2	1	42
Sardegna	8	1	0	0	3	0	0	3	1	1	17
Sic. 1	10	1	1	0	5	0	0	7	1	0	25
Sic. 2	11	1	1	0	6	0	0	7	1	0	27
Toscana	24	2	0	0	4	0	1	5	2	0	38
T-AA	3	0	0	5	1	0	0	1	1	0	11
Umbria	5	1	0	0	1	0	0	1	1	0	9
Ven. 1	13	1	0	0	4	3	1	6	2	1	31
Ven. 2	9	1	0	0	2	2	0	4	2	0	20
TOT	292	37	6	5	97	18	9	108	37	8	617

Tabella 6: Camera dei Deputati 2013: seggi lexicomin con quote ministeriali

	PD	SEL	CD	SVP	PDL	LN	FI	M5S	SC	UDC	TOT
Abruzzo	6	1	0	0	2	0	1	3	1	0	14
Bas.	3	1	0	0	1	0	0	1	0	0	6
Camp. 1	14	2	1	0	7	0	1	5	1	1	32
Camp. 2	12	2	1	0	6	0	1	4	1	1	28
Calabria	9	2	1	0	3	0	0	3	1	1	20
Em. Rom.	28	2	0	0	5	1	0	7	2	0	45
F-VG	6	1	0	0	2	1	0	2	1	0	13
Lazio 1	21	3	0	0	6	0	1	8	2	1	42
Lazio 2	7	1	0	0	3	0	1	3	1	0	16
Liguria	8	1	0	0	2	1	0	3	1	0	16
Lomb. 1	21	2	0	0	6	2	1	5	3	0	40
Lomb. 2	20	2	0	0	7	6	0	6	4	0	45
Lomb. 3	8	1	0	0	3	1	0	2	1	0	16
Molise	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	3
Marche	8	1	1	0	2	0	0	3	1	0	16
Piem. 1	11	2	0	0	3	1	0	4	2	0	23
Piem. 2	10	1	0	0	3	1	1	4	2	0	22
Puglia	15	5	1	0	9	0	1	8	2	1	42
Sardegna	8	1	0	0	3	0	0	4	1	0	17
Sic. 1	10	1	0	0	5	0	0	7	1	1	25
Sic. 2	11	1	1	0	5	0	0	7	1	1	27
Toscana	24	2	0	0	4	0	1	5	2	0	38
T-AA	3	0	0	5	1	0	0	1	1	0	11
Umbria	5	0	0	0	1	0	0	2	1	0	9
Ven. 1	13	1	0	0	5	3	0	6	2	1	31
Ven. 2	9	1	0	0	3	1	0	4	2	0	20
TOT	292	37	6	5	97	18	9	108	37	8	617

Tabella 7: Camera dei Deputati 2013: seggi con norma minima L1 e L2, con quote ministeriali

	PD	SEL	CD	SVP	PDL	LN	FI	M5S	SC	UDC	TOT
Abruzzo	6	1	0	0	3	0	0	3	1	0	14
Bas.	3	1	0	0	1	0	0	1	0	0	6
Camp. 1	14	2	1	0	7	0	1	5	1	1	32
Camp. 2	12	2	0	0	6	0	1	4	2	1	28
Calabria	9	1	1	0	4	0	0	4	0	1	20
Em. Rom.	28	2	0	0	5	1	0	7	2	0	45
F-VG	6	1	0	0	1	1	0	2	1	0	**12**
Lazio 1	21	3	0	0	6	0	1	8	2	1	42
Lazio 2	7	1	0	0	3	0	1	3	1	0	16
Liguria	9	1	0	0	2	0	0	3	1	0	16
Lomb. 1	21	2	0	0	5	2	1	6	3	0	40
Lomb. 2	20	2	0	0	7	6	0	6	4	0	45
Lomb. 3	8	1	0	0	2	1	1	2	1	0	16
Molise	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**2**
Marche	9	1	0	0	2	0	0	3	1	0	16
Piem. 1	11	2	0	0	3	1	0	4	2	0	23
Piem. 2	10	1	0	0	3	1	1	4	2	0	22
Puglia	15	5	1	0	9	0	1	8	2	1	42
Sardegna	8	1	1	0	3	0	0	4	1	0	**18**
Sic. 1	10	1	0	0	6	0	0	6	1	1	25
Sic. 2	10	1	1	0	6	0	0	7	1	1	27
Toscana	23	2	1	0	4	0	1	5	2	0	38
T-AA	3	1	0	5	1	0	0	1	1	0	**12**
Umbria	5	0	0	0	1	0	0	2	1	0	9
Ven. 1	13	1	0	0	5	3	0	6	2	1	31
Ven. 2	9	1	0	0	2	2	0	4	2	0	20
TOT	292	37	6	5	97	18	9	108	37	8	617

Tabella 8: Camera dei Deputati 2013: allocazione ministeriale

19 Metodi in uso in alcune nazioni

20 Flussi elettorali

Disegno dei distretti elettorali

Il teorema di Arrow

Siano dati un insieme di individui $\mathcal{S}$ (la società) e un insieme di alternative $\mathcal{A}$. Ogni individuo ha una sua struttura di preferenze sulle alternative, detta *profilo*, che consiste nella definizione, per ogni coppia di alternative $i, j \in \mathcal{A}$, di una delle tre relazioni $i \succ j$ (l'alternativa i è preferita all'alternativa j), $j \succ i$ (j è preferito a i) e $i \sim j$ (le alternative i e j sono indifferenti). Si pretende che gli individui siano razionali nel senso che le preferenze espresse devono rispettare la transitività.

Quindi, ad esempio, se $\mathcal{A}$ consiste delle tre alternative i, j e k, ogni individuo può avere come profilo una delle seguenti 13 possibilità: le sei permutazioni di $(i \succ j \succ k)$, i tre casi $(i \succ j \sim k)$, i tre casi $i \sim j \succ k$ e $(i \sim j \sim k)$. Con tre alternative il numero di possibili insiemi di profili che la società può esprimere è $13^{|\mathcal{S}|}$. Si tratta di un numero molto elevato ed è chiaro che con un numero più elevato di alternative il numero di possibili strutture di preferenza è astronomico.

Una funzione di benessere sociale (Social Welfare Function) è una funzione Ψ che ha come argomento l'insieme dei profili degli individui e fornisce un profilo sociale che aggreghi e rappresenti al meglio i profili degli individui.

Affinché una tale funzione rappresenti 'al meglio' le preferenze degli individui viene richiesto che la funzione rispetti alcuni semplici assiomi. Gli assiomi, come enunciati da Arrow [2, 3], sono:

1) **Universalità del dominio**. Non sono ammesse restrizioni sulle possibili scelte di preferenza degli individui, ovvero la funzione deve poter agire sempre, non importa quanto diversi siano i singoli profili. L'assioma sembra di natura tecnica, ma in realtà considera il fatto che una società possa essere molto compatta ideologicamente e quindi esprimere profili molto simili. In questi casi una funzione sociale potrebbe esistere ed essere facilmente determinabile.

2) **Unanimità**. Se tutti gli individui hanno la medesima preferenza fra due alternative i e j allora anche la funzione sociale deve fornire la stessa preferenza. Il requisito va inteso anche in un senso esteso: se per ogni individuo vale $i \succ j$ oppure $i \sim j$ allora nel profilo sociale non si può avere $j \succ i$.

3) **Indipendenza dalle Alternative Irrilevanti**. Se si considera un sottoinsieme $\bar{\mathcal{A}}$ di alternative, e se due diversi insiemi di profili individuali sono identici rispetto alle alternative in $\bar{\mathcal{A}}$, la funzione Ψ deve fornire la medesima struttura di preferenza su $\bar{\mathcal{A}}$ per entrambi gli insiemi di profili. Ad esempio se sono presenti quattro alternative e quattro individui, per i seguenti insiemi di profili

$$\begin{pmatrix} 1 \succ 2 \succ 3 \sim 4 \\ 3 \succ 4 \succ 1 \sim 2 \\ 1 \succ 4 \succ 3 \succ 2 \\ 2 \sim 3 \succ 1 \sim 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \succ 4 \succ 3 \sim 2 \\ 1 \sim 2 \succ 3 \succ 4 \\ 3 \sim 4 \succ 1 \succ 2 \\ 2 \succ 1 \sim 3 \sim 4 \end{pmatrix}$$

la funzione Ψ deve fornire la stessa relazione fra 1 e 2, perché, una volta tolte le alternative 3 e 4, i due insiemi di profili sono identici.

4) **Non Dittatorialità**. Se esiste un individuo per il quale $i \succ j$ implica che anche nel profilo fornito da Ψ si ha $i \succ j$, un tale individuo viene definito *dittatore*. L'assioma esclude l'esistenza di un dittatore. Si noti che per essere un dittatore un individuo deve imporre solo le sue preferenze strette sulla società e non viene invece richiesto che imponga anche l'indifferenza. Quindi, se per il dittatore si ha $i \sim j$, il

profilo sociale può essere qualsiasi rispetto alle alternative i e j.

Il notevole risultato enunciato da Arrow è il suo celebre teorema di impossibilità:

Teorema 7. (Teorema di Arrow) Non esiste una funzione di benessere sociale che soddisfi i quattro assiomi, se gli individui sono almeno due e le alternative almeno tre. ∎

Prima di dimostrare il teorema costruiamo una funzione con due sole alternative e due individui. Con due sole alternative l'assioma dell'Indipendenza delle Alternative Irrilevanti diventa vuoto e quindi si tratta di soddisfare solo gli altri tre assiomi. In base all'assioma di Universalità dobbiamo considerare tutti i possibili profili che, per due alternative e due individui, sono nove

$$\pi^1 = \begin{pmatrix} 1 \succ 2 \\ 1 \succ 2 \end{pmatrix},\ \pi^2 = \begin{pmatrix} 2 \succ 1 \\ 1 \succ 2 \end{pmatrix},\ \pi^3 = \begin{pmatrix} 1 \sim 2 \\ 1 \succ 2 \end{pmatrix},\ \pi^4 = \begin{pmatrix} 1 \succ 2 \\ 2 \succ 1 \end{pmatrix},\ \pi^5 = \begin{pmatrix} 2 \succ 1 \\ 2 \succ 1 \end{pmatrix},$$

$$\pi^6 = \begin{pmatrix} 1 \sim 2 \\ 2 \succ 1 \end{pmatrix},\ \pi^7 = \begin{pmatrix} 1 \succ 2 \\ 1 \sim 2 \end{pmatrix},\ \pi^8 = \begin{pmatrix} 2 \succ 1 \\ 1 \sim 2 \end{pmatrix},\ \pi^9 = \begin{pmatrix} 1 \sim 2 \\ 1 \sim 2 \end{pmatrix}$$

In base all'Unanimità per tre profili la funzione è esattamente definita. Per gli altri sei, supponiamo che quando ci sia indifferenza per un individuo, decide l'altro individuo. Quindi la situazione è

$$\Psi(\pi^1) = (1 \succ 2), \quad \Psi(\pi^3) = (1 \succ 2), \quad \Psi(\pi^5) = (2 \succ 1), \quad \Psi(\pi^6) = (2 \succ 1),$$

$$\Psi(\pi^7) = (1 \succ 2), \quad \Psi(\pi^8) = (2 \succ 1), \quad \Psi(\pi^9) = (1 \sim 2)$$

Rimangono da definire $\Psi(\pi^2)$ e $\Psi(\pi^4)$. Dei nove casi possibili dobbiamo escludere $\Psi(\pi^2) = (1 \succ 2)$ e $\Psi(\pi^4) = (2 \succ 1)$ perché l'individuo 2 sarebbe un dittatore. Analogamente dobbiamo escludere $\Psi(\pi^2) = (2 \succ 1)$ e $\Psi(\pi^4) = (1 \succ 2)$ perché l'individuo 1 sarebbe un dittatore. I rimanenti sette casi rispettano gli assiomi.

Si definisce *neutrale* una funzione sociale che è simmetrica rispetto alle alternative. In modo analogo si definisce *anonima* una funzione sociale che è simmetrica rispetto agli individui.

La scelta $\Psi(\pi^2) = (1 \sim 2)$ e $\Psi(\pi^4) = (1 \succ 2)$ non dà luogo ad una funzione sociale neutrale perché l'alternativa 1 è preferita una volta di più dell'alternativa 2 (rispetto a tutti i nove profili). La funzione non è nemmeno simmetrica perché il profilo sociale coincide con quello dell'individuo 1 una volta di più che per l'individuo 2. Discorso analogo vale per altri tre casi simili $\Psi(\pi^2) = (1 \sim 2)$ e $\Psi(\pi^4) = (2 \succ 1)$, $\Psi(\pi^2) = (1 \succ 2)$ e $\Psi(\pi^4) = (1 \sim 2)$, $\Psi(\pi^2) = (2 \succ 1)$ e $\Psi(\pi^4) = (1 \sim 2)$.

Nei due casi $\Psi(\pi^2) = \Psi(\pi^4) = (1 \succ 2)$ oppure $\Psi(\pi^2) = \Psi(\pi^4) = (2 \succ 1)$ la funzione è anonima ma non neutrale. Finalmente l'unico caso in cui la funzione è sia anonima che neutrale è $\Psi(\pi^2) = (1 \sim 2)$ e $\Psi(\pi^4) = (1 \sim 2)$.

In generale sembra naturale chiedere ad una funzione sociale di essere sia neutrale (se ad esempio le alternative sono i candidati in un'elezione la richiesta sembra doverosa) e di essere anonima (i cittadini sono tutti uguali). Però il risultato negativo del teorema di Arrow dimostra come questo sia impossibile, in quanto la richiesta di Non Dittatorialità è più debole della richiesta di Anonimità (se una funzione è anonima certamente non ci può essere un dittatore, ma una funzione sociale può non avere un dittatore e non essere anonima).

Con due sole alternative esiste un interessante risultato positivo, il Teorema di May [16], che stabilisce l'esistenza e unicità di una funzione sociale che soddisfi la neutralità, l'anonimità ed una terza condizione, detta *risposta positiva*. Una funzione sociale ha una risposta positiva se, per ogni π per cui $(i \sim j) \in \Psi(\pi)$, se π viene ambiato in π' in cui almeno un cittadino ha cambiato la sua preferenza da $j \succ i$ in $i \sim j$ oppure da $i \sim j$ in $i \succ j$ allora $(i \succ j) \in \Psi(\pi')$ e naturalmente se $(i \succ j) \in \Psi(\pi)$ anche $(i \succ j) \in \Psi(\pi')$.

Teorema 8. (Teorema di May) L'unica funzione sociale che, in presenza di due sole alternative, sia anonima, neutrale ed abbia risposta positiva è il metodo di maggioranza. ∎

Il metodo di maggioranza può fornire il risultato di indifferenza se le due alternative hanno lo stesso numero di favorevoli (gli altri essendo indifferenti). Se vogliamo escludere la possibilità di indifferenza il teorema rimane valido con l'aggiunta di richiedere un numero dispari di individui. Con tre alternative il metodo di maggioranza può produrre risultati inconsistenti come dimostrato già da Condorcet nel 1785 con il suo celebre paradosso. Si supponga che tre individui abbiano i seguenti profili

$$\begin{pmatrix} 1 \succ 2 \succ 3 \\ 2 \succ 3 \succ 1 \\ 3 \succ 1 \succ 2 \end{pmatrix}$$

Confrontando 1 con 2 si vede che, usando il metodo di maggioranza, si ottiene $1 \succ 2$. In modo analogo si ottiene $2 \succ 3$ e $3 \succ 1$ producendo così un ordinamento ciclico.

Se si indebolisce l'assioma di Universalità del Dominio, allora possono esistere funzioni sociali anche con tre o più alternative. Il caso più interessante è il seguente [11]: ad ogni alternativa i è associato un numero a_i e ad ogni individuo j è associato un numero b_j. La relazione d'ordine fra le alternative per l'individuo j è indotta dalle distanze di ogni a_i da b_j (tanto più vicino tanto meglio). Ad esempio se possiamo classificare le alternative su una scala da 'estrema destra' a 'estrema sinistra' (in senso politico) e ogni individuo ha una sua collocazione b_j sulla stessa scala, allora valuterà le alternative tanto migliori quanto sono più vicine alla sua posizione. Con questa restrizione sul dominio il metodo di maggioranza rispetta gli assiomi. In particolare, se il numero di individui è dispari, allora il valore mediano dei b_j serve da punto ideale per il profilo sociale e la relazione d'ordine è indotta dalla distanza rispetto a questo punto.

Se si indebolisce l'Assioma di Non Dittatorialità definendo dittatore anche colui che impone la propria indifferenza fra due alternative all'intera società, il Teorema di Arrow non è più valido. Infatti un profilo sociale si può costruire nel seguente modo. Si ordinano gli individui in modo arbitrario. Sia $k = 1$. Se l'individuo k ha la preferenza $i \succ j$ allora la funzione sociale ha anche $i \succ j$. Se invece l'individuo k ha $i \sim j$ allora si passa al successivo individuo $k + 1$. Se per tutti gli individui si ha $i \sim j$ allora la funzione sociale (per l'Assioma di Unanimità) deve essere $i \sim j$. L'Assioma dell'Indipendenza dalle Alternative Irrilevanti è anche soddisfatto. Si noti che il primo individuo è un dittatore in base alla definizione normale.

Dimostriamo adesso il Teorema di Arrow. Vengono fornite due dimostrazioni. La prima è più astratta e si basa sulla nozione di insiemi decisivi. Inoltre fa uso dell'Assioma di Risposta Positiva che fu usato da Arrow nella sua prima dimostrazione (e poi abbandonato in favore dell'ipotesi meno forte di Unanimità). La seconda (qui limitata al caso di tre alternative e due individui, ma estendibile a più alternative e più individui) è invece di tipo construttivo.

Prima dimostrazione del Teorema di Arrow

Un insieme V di individui viene detto *decisivo* se, per qualche coppia ordinata di alternative (i, j), per tutti gli insiemi di profili π in cui ogni individuo in V ha la preferenza $i \succ j$, si ha $(i \succ j) \in \Psi(\pi)$ indipendentemente dalle preferenze degli individui non in V. Insiemi decisivi esistono, infatti banalmente $\mathcal{S}$ è decisivo sempre. Esistono allora insiemi decisivi minimali, per i quali, togliendo un individuo l'insieme non è più decisivo. Inoltre un insieme decisivo minimale non può essere vuoto perché allora il suo complemento, cioè $\mathcal{S}$, non sarebbe decisivo.

Assumendo l'Assioma di Risposta Positiva un insieme V è decisivo se e solo se $i \succ j$ per ogni individuo in V, $j \succ i$ per ogni individuo non in V e $i \succ j$ è la preferenza della funzione socsiale. Ogni altra preferenza degli individui non in V non può cambiare l'esito della funzione sociale in base all'Assioma di Risposta Positiva.

Sia V allora un insieme decisivo minimale per la coppia (i, j) e sia a un individuo in V. Sia $W = V \backslash \{a\}$. Si noti che W e $U = \mathcal{S} \setminus V$ non possono essere entrambi vuoti. Sia k una terza alternativa e siano dati i seguenti profili

$$\pi = \begin{pmatrix} i \succ j \succ k \\ k \succ i \succ j \\ j \succ k \succ i \end{pmatrix} \begin{array}{c} \{a\} \\ W \\ U \end{array} \tag{29}$$

Siccome V è decisivo per la coppia (i, j) si ha $(i \succ j) \in \Psi(\pi)$. Inoltre, se fosse $(k \succ j) \in \Psi(\pi)$, questo vorrebbe dire che W è decisivo per la coppia (k, j), contraddicendo però la minimalità di V. Quindi $(j \succ k) \in \Psi(\pi)$. Per la transitività $(i \succ k) \in \Psi(\pi)$. Ma a è l'unico individuo a preferire i a k e quindi deve essere decisivo per la coppia (i, k). In base alla minimalità di V non resta che concludere $\{a\} = V$ (e quindi W è vuoto).

A questo punto a è decisivo non solo per la particolare coppia (i, j) ma anche per tutte le coppie (i, k) (i precedenti ragionamenti sono validi per qualsiasi $k \neq i$). Sia ora $\ell \neq i$ un'altra alternativa e consideriamo i profili

$$\pi = \begin{pmatrix} \ell \succ i \succ k \\ k \succ \ell \succ i \end{pmatrix} \begin{array}{c} \{a\} \\ U \end{array}$$

Per l'Unanimità $(\ell \succ i) \in \Psi(\pi)$ e siccome a è decisivo per la coppia (i, k), anche $(i \succ k) \in \Psi(\pi)$. Per la transitività $(\ell \succ k) \in \Psi(\pi)$ e quindi a è decisivo anche per la coppia (ℓ, k). Consideriamo ancora un profilo

$$\pi = \begin{pmatrix} \ell \succ k \succ i \\ k \succ i \succ \ell \end{pmatrix} \begin{array}{c} \{a\} \\ U \end{array}$$

Per l'Unanimità $(k \succ i) \in \Psi(\pi)$ e siccome a è decisivo per la coppia (ℓ, k), anche $(\ell \succ k) \in \Psi(\pi)$. Per la transitività $(k \succ \ell) \in \Psi(\pi)$ e quindi a è decisivo anche per la coppia (k, ℓ). In conclusione a è decisivo per ogni coppia di alternative, cioè è un dittatore e quindi non può esistere nessuna funzione sociale che non violi gli assiomi. ∎

Seconda dimostrazione del Teorema di Arrow

Consideriamo i seguenti 36 profili, in cui sono elencate tutte le possibili relazioni di preferenza stretta per i due individui.

$$\pi^1 = \begin{pmatrix} 1 \succ 2 \succ 3 \\ 1 \succ 2 \succ 3 \end{pmatrix}, \quad \pi^2 = \begin{pmatrix} 1 \succ 2 \succ 3 \\ 1 \succ 3 \succ 2 \end{pmatrix}, \quad \pi^3 = \begin{pmatrix} 1 \succ 2 \succ 3 \\ 2 \succ 1 \succ 3 \end{pmatrix}, \quad \pi^4 = \begin{pmatrix} 1 \succ 2 \succ 3 \\ 2 \succ 3 \succ 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi^5 = \begin{pmatrix} 1 \succ 2 \succ 3 \\ 3 \succ 1 \succ 2 \end{pmatrix}, \quad \pi^6 = \begin{pmatrix} 1 \succ 2 \succ 3 \\ 3 \succ 2 \succ 1 \end{pmatrix}, \quad \pi^7 = \begin{pmatrix} 1 \succ 3 \succ 2 \\ 1 \succ 2 \succ 3 \end{pmatrix}, \quad \pi^8 = \begin{pmatrix} 1 \succ 3 \succ 2 \\ 1 \succ 3 \succ 2 \end{pmatrix}$$

$$\pi^9 = \begin{pmatrix} 1 \succ 3 \succ 2 \\ 2 \succ 1 \succ 3 \end{pmatrix}, \quad \pi^{10} = \begin{pmatrix} 1 \succ 3 \succ 2 \\ 2 \succ 3 \succ 1 \end{pmatrix}, \quad \pi^{11} = \begin{pmatrix} 1 \succ 3 \succ 2 \\ 3 \succ 1 \succ 2 \end{pmatrix}, \quad \pi^{12} = \begin{pmatrix} 1 \succ 3 \succ 2 \\ 3 \succ 2 \succ 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi^{13} = \begin{pmatrix} 2 \succ 1 \succ 3 \\ 1 \succ 2 \succ 3 \end{pmatrix}, \quad \pi^{14} = \begin{pmatrix} 2 \succ 1 \succ 3 \\ 1 \succ 3 \succ 2 \end{pmatrix}, \quad \pi^{15} = \begin{pmatrix} 2 \succ 1 \succ 3 \\ 2 \succ 1 \succ 3 \end{pmatrix}, \quad \pi^{16} = \begin{pmatrix} 2 \succ 1 \succ 3 \\ 2 \succ 3 \succ 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi^{17} = \begin{pmatrix} 2 \succ 1 \succ 3 \\ 3 \succ 1 \succ 2 \end{pmatrix}, \quad \pi^{18} = \begin{pmatrix} 2 \succ 1 \succ 3 \\ 3 \succ 2 \succ 1 \end{pmatrix}, \quad \pi^{19} = \begin{pmatrix} 2 \succ 3 \succ 1 \\ 1 \succ 2 \succ 3 \end{pmatrix}, \quad \pi^{20} = \begin{pmatrix} 2 \succ 3 \succ 1 \\ 1 \succ 3 \succ 2 \end{pmatrix}$$

$$\pi^{21} = \begin{pmatrix} 2 \succ 3 \succ 1 \\ 2 \succ 1 \succ 3 \end{pmatrix}, \quad \pi^{22} = \begin{pmatrix} 2 \succ 3 \succ 1 \\ 2 \succ 3 \succ 1 \end{pmatrix}, \quad \pi^{23} = \begin{pmatrix} 2 \succ 3 \succ 1 \\ 3 \succ 1 \succ 2 \end{pmatrix}, \quad \pi^{24} = \begin{pmatrix} 2 \succ 3 \succ 1 \\ 3 \succ 2 \succ 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi^{25} = \begin{pmatrix} 3 \succ 1 \succ 2 \\ 1 \succ 2 \succ 3 \end{pmatrix}, \quad \pi^{26} = \begin{pmatrix} 3 \succ 1 \succ 2 \\ 1 \succ 3 \succ 2 \end{pmatrix}, \quad \pi^{27} = \begin{pmatrix} 3 \succ 1 \succ 2 \\ 2 \succ 1 \succ 3 \end{pmatrix}, \quad \pi^{28} = \begin{pmatrix} 3 \succ 1 \succ 2 \\ 2 \succ 3 \succ 1 \end{pmatrix}$$

$$\pi^{29} = \begin{pmatrix} 3 \succ 1 \succ 2 \\ 3 \succ 1 \succ 2 \end{pmatrix}, \quad \pi^{30} = \begin{pmatrix} 3 \succ 1 \succ 2 \\ 3 \succ 2 \succ 1 \end{pmatrix}, \quad \pi^{31} = \begin{pmatrix} 3 \succ 2 \succ 1 \\ 1 \succ 2 \succ 3 \end{pmatrix}, \quad \pi^{32} = \begin{pmatrix} 3 \succ 2 \succ 1 \\ 1 \succ 3 \succ 2 \end{pmatrix}$$

$$\pi^{33} = \begin{pmatrix} 3 \succ 2 \succ 1 \\ 2 \succ 1 \succ 3 \end{pmatrix}, \quad \pi^{34} = \begin{pmatrix} 3 \succ 2 \succ 1 \\ 2 \succ 3 \succ 1 \end{pmatrix}, \quad \pi^{35} = \begin{pmatrix} 3 \succ 2 \succ 1 \\ 3 \succ 1 \succ 2 \end{pmatrix}, \quad \pi^{36} = \begin{pmatrix} 3 \succ 2 \succ 1 \\ 3 \succ 2 \succ 1 \end{pmatrix}$$

In base all'assioma di Unanimità, per

$$\pi \in \{\pi^1, \pi^2, \pi^5, \pi^7, \pi^8, \pi^{11}, \pi^{25}, \pi^{26}, \pi^{29}\}$$

si deve avere $(1 \succ 2) \in \Psi(\pi)$. In modo analogo si ha

$$\pi \in \{\pi^{15}, \pi^{16}, \pi^{18}, \pi^{21}, \pi^{22}, \pi^{24}, \pi^{33}, \pi^{34}, \pi^{36}\} \quad \Longrightarrow \quad (2 \succ 1) \in \Psi(\pi)$$

$$\pi \in \{\pi^1, \pi^2, \pi^3, \pi^7, \pi^8, \pi^9, \pi^{13}, \pi^{14}, \pi^{15}\} \quad \Longrightarrow \quad (1 \succ 3) \in \Psi(\pi)$$

$$\pi \in \{\pi^{22}, \pi^{23}, \pi^{24}, \pi^{28}, \pi^{29}, \pi^{30}, \pi^{34}, \pi^{35}, \pi^{36}\} \quad \Longrightarrow \quad (3 \succ 1) \in \Psi(\pi)$$

$$\pi \in \{\pi^1, \pi^3, \pi^4, \pi^{13}, \pi^{15}, \pi^{16}, \pi^{19}, \pi^{21}, \pi^{22}\} \quad \Longrightarrow \quad (2 \succ 3) \in \Psi(\pi)$$

$$\pi \in \{\pi^8, \pi^{11}, \pi^{12}, \pi^{26}, \pi^{29}, \pi^{30}, \pi^{32}, \pi^{35}, \pi^{36}\} \quad \Longrightarrow \quad (3 \succ 2) \in \Psi(\pi)$$

In base all'Assioma di Indipendenza per

$$\pi \in \{\pi^3, \pi^4, \pi^6, \pi^9, \pi^{10}, \pi^{12}, \pi^{27}, \pi^{28}, \pi^{30}\}$$

la relazione X_{12} fra 1 e 2 prodotta da $\Psi(\pi)$ deve essere invariante e anche la relazione Y_{12} fra 1 e 2 prodotta da $\Psi(\pi)$ deve essere invariante sull'insieme

$$\{\pi^{13}, \pi^{14}, \pi^{17}, \pi^{19}, \pi^{20}, \pi^{23}, \pi^{31}, \pi^{32}, \pi^{35}\}$$

In modo analogo abbiamo altre quattro relazioni X_{13}, Y_{13}, X_{23} e Y_{23} che devono essere invarianti sugli insiemi elencati

$$\pi \in \{\pi^4, \pi^5, \pi^6, \pi^{10}, \pi^{11}, \pi^{12}, \pi^{16}, \pi^{17}, \pi^{18}\} \quad \Longrightarrow \quad X_{13} \in \Psi(\pi)$$

$$\pi \in \{\pi^{19}, \pi^{20}, \pi^{21}, \pi^{25}, \pi^{26}, \pi^{27}, \pi^{31}, \pi^{32}, \pi^{33}\} \quad \Longrightarrow \quad Y_{13} \in \Psi(\pi)$$

$$\pi \in \{\pi^2, \pi^5, \pi^6, \pi^{14}, \pi^{17}, \pi^{18}, \pi^{20}, \pi^{23}, \pi^{24}\} \quad \Longrightarrow \quad X_{23} \in \Psi(\pi)$$

$$\pi \in \{\pi^7, \pi^9, \pi^{10}, \pi^{25}, \pi^{27}, \pi^{28}, \pi^{31}, \pi^{33}, \pi^{34}\} \quad \Longrightarrow \quad Y_{23} \in \Psi(\pi)$$

Si assegni il valore di relazione $X_{23} = (2 \sim 3)$. Allora si ha

$$\Psi(\pi^5) = (1 \succ 2\,,\, X_{13}\,,\, 2 \sim 3)$$

da cui $X_{13} = (1 \succ 3)$. Allora si ha

$$\Psi(\pi^6) = (X_{12}\,,\, 1 \succ 3\,,\, 2 \sim 3)$$

da cui $X_{12} = (1 \succ 2)$ e anche

$$\Psi(\pi^{14}) = (Y_{12}\,,\, 1 \succ 3\,,\, 2 \sim 3)$$

da cui $Y_{12} = (1 \succ 2)$. Adesso si ha

$$\Psi(\pi^{20}) = (1 \succ 2\,,\, Y_{13}\,,\, 2 \sim 3)$$

da cui $Y_{13} = (1 \succ 3)$. Adesso si ha

$$\Psi(\pi^{33}) = (2 \succ 1\,,\, 1 \succ 3\,,\, Y_{23})$$

da cui $Y_{23} = (2 \succ 3)$. Però a questo punto si ha

$$\Psi(\pi^{28}) = (1 \succ 2\,,\, 3 \succ 1\,,\, 2 \succ 3)$$

che viola la transitività e quindi la scelta $X_{23} = (2 \sim 3)$ è inammissibile. Assegniamo allora $X_{23} = (2 \succ 3)$. Questa scelta comporta

$$\Psi(\pi^5) = (1 \succ 2\,,\, X_{13}\,,\, 2 \succ 3)$$

da cui $X_{13} = (1 \succ 3)$. Allora si ha

$$\Psi(\pi^{12}) = (X_{12}\,,\, 1 \succ 3\,,\, 3 \succ 2)$$

da cui $X_{12} = (1 \succ 2)$ e anche

$$\Psi(\pi^{23}) = (Y_{12}\,,\, 3 \succ 1\,,\, 2 \succ 3)$$

da cui $Y_{12} = (2 \succ 1)$. Allora si ha

$$\Psi(\pi^{32}) = (2 \succ 1\,,\, Y_{13}\,,\, 3 \succ 2)$$

da cui $Y_{13} = (3 \succ 1)$. Infine si ha

$$\Psi(\pi^{28}) = (1 \succ 2\,,\, 3 \succ 1\,,\, Y_{23})$$

da cui $Y_{23} = (3 \succ 2)$. A questo punto tutte le relazioni sono state determinate e quindi si è costruita una funzione Ψ, basata sulla scelta $X_{23} = (2 \succ 3)$. La funzione vale

$$\Psi(\pi^1) = (1 \succ 2 \succ 3), \quad \Psi(\pi^2) = (1 \succ 2 \succ 3), \quad \Psi(\pi^3) = (1 \succ 2 \succ 3), \quad \Psi(\pi^4) = (1 \succ 2 \succ 3),$$

$$\Psi(\pi^5) = (1 \succ 2 \succ 3), \quad \Psi(\pi^6) = (1 \succ 2 \succ 3), \quad \Psi(\pi^7) = (1 \succ 3 \succ 2), \quad \Psi(\pi^8) = (1 \succ 3 \succ 2),$$

$$\Psi(\pi^9) = (1 \succ 3 \succ 2), \quad \Psi(\pi^{10}) = (1 \succ 3 \succ 2), \quad \Psi(\pi^{11}) = (1 \succ 3 \succ 2), \quad \Psi(\pi^{12}) = (1 \succ 3 \succ 2),$$

$$\Psi(\pi^{13}) = (2 \succ 1 \succ 3), \quad \Psi(\pi^{14}) = (2 \succ 1 \succ 3), \quad \Psi(\pi^{15}) = (2 \succ 1 \succ 3), \quad \Psi(\pi^{16}) = (2 \succ 1 \succ 3),$$

$$\Psi(\pi^{17}) = (2 \succ 1 \succ 3), \quad \Psi(\pi^{18}) = (2 \succ 1 \succ 3), \quad \Psi(\pi^{19}) = (2 \succ 3 \succ 1), \quad \Psi(\pi^{20}) = (2 \succ 3 \succ 1),$$

$$\Psi(\pi^{21}) = (2 \succ 3 \succ 1), \quad \Psi(\pi^{22}) = (2 \succ 3 \succ 1), \quad \Psi(\pi^{23}) = (2 \succ 3 \succ 1), \quad \Psi(\pi^{24}) = (2 \succ 3 \succ 1),$$

$$\Psi(\pi^{25}) = (3 \succ 1 \succ 2), \quad \Psi(\pi^{26}) = (3 \succ 1 \succ 2), \quad \Psi(\pi^{27}) = (3 \succ 1 \succ 2), \quad \Psi(\pi^{28}) = (3 \succ 1 \succ 2),$$

$$\Psi(\pi^{29}) = (3 \succ 1 \succ 2), \quad \Psi(\pi^{30}) = (3 \succ 1 \succ 2), \quad \Psi(\pi^{31}) = (3 \succ 2 \succ 1), \quad \Psi(\pi^{32}) = (3 \succ 2 \succ 1),$$

$$\Psi(\pi^{33}) = (3 \succ 2 \succ 1), \quad \Psi(\pi^{34}) = (3 \succ 2 \succ 1), \quad \Psi(\pi^{35}) = (3 \succ 2 \succ 1), \quad \Psi(\pi^{36}) = (3 \succ 2 \succ 1),$$

Come si vede la funzione sociale riproduce esattamente il profilo del primo individuo e quindi viene violato l'Assioma di Non Dittatorialità. Anche la scelta $X_{23} = (2 \succ 3)$ risulta quindi inammissibile. Non resta che la scelta $X_{23} = (3 \succ 2)$, ma è chiaro che data la simmetria fra le alternative e gli individui anche questa scelta viola l'Assioma di Non Dittatorialità, che in questo caso vede il secondo individuo agire da dittatore.

Bisogna allora concludere che non può esistere una funzione sociale che non violi nessuno degli assiomi. ∎

Riferimenti bibliografici

[1] R.K. Ahuja, T.L. Magnanti and J.B. Orlin: *Network flows. Theory, algorithms and applications*. Prentice Hall, New Jersey (1993).

[2] K.J. Arrow: A difficulty in the concept of social welfare, *Journal of Political Economy*, **58**, 328–346 (1950).

[3] K.J. Arros: *Social choice and individual values*. Yale University Press, New Haven (1963).

[4] M. Bacharach: Estimating nonnegative matrices from marginal data, *International Economic Review*, **6**, 294–310 (1965).

[5] M.L. Balinski, G. Demange: Algorithms for proportional matrices in reals and integers, *Mathematical Programming*, **45**, 193-210 (1989).

[6] M.L. Balinski, G. Demange: An axiomatic approach to proportionality between matrices, *Mathematics of Operations Research*, **14**, 700-719 (1989).

[7] M.L. Balinski and H.P. Young: *Fair representation—Meeting the ideal of one man, one vote, Second Edition*. Brookings Institution Press, Washington, DC (2001).

[8] B.A. Bradberry: A geometric view of some apportionment paradoxes, *Mathematics Magazine*, **65**, 3–17. Mathematical Association of America (1992).

[9] L.H. Cox and L.R. Ernst: Controlled rounding, *INFOR—Information Systems and Operational Research*, **20**, 423–432 (1982).

[10] G. Grimmett, with J.-F. Laslier, F. Pukelsheim, V. Ramírez González, R. Rose, W. Słomczyński, M. Zachariasen, and K. Zyczkowski: The allocation between the EU Member States of the seats in the European Parliament. European Parliament, Directorate-General for Internal Policies, Policy Department C: Citizen's Rights and Constitutional Affairs, (PE 432.760) (2011).

[11] D. Black: On the rationale of group decision-making, *Journal of Political Economy*, **56**, 3–34 (1948).

[12] E.V. Huntington: The Mathematical Theory of the Apportionment of Representatives, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **7**, 123-127. Disponibile anche a http://www.pnas.org/content/7/4/123.full.pdf+html (1921).

[13] B. Kalantari, I. Lari, F. Ricca, and B. Simeone: On the complexity of general matrix scaling and entropy minimization via the RAS algorithm, *Mathematical Programming, Series A*, **112**, 371–401 (2008).

[14] A. Lamassoure and A. Severin, Rapporteurs: European Parliament Resolution on *Proposal to amend the Treaty provisions concerning the composition of the European Parliament*. adottata l'11/10/2007 (INI/2007/2169) (2007).

[15] D.G. Luenberger: *Optimization by vector space methods*. Wiley, New York (1969).

[16] K.O. May: A set of independent necessary and sufficient conditions for simple majority decisions, *Econometrica*, **20**, 680–684 (1952).

[17] M. Minoux: A polynomial algorithm for minimum quadratic cost flow problems, *European Journal of Operational Research*, **18**, 377-387 (1984).

[18] M. Minoux: Solving integer minimum cost flows with separable convex cost objective polynomially, *Mathematical Programming Studies*, **26**, 237-239 (1986).

[19] A. Pennisi: The Italian bug: a flawed procedure for bi-proportional seat allocation, in: B. Simeone, F. Pukelsheim (eds), *Mathematics and democracy: Recent advances in voting systems and collective choice*, pp. 151-166, Berlin, Springer (2006).

[20] A. Pennisi, F. Ricca, B. Simeone: Malfunzionamenti dell'allocazione biproporzionale di seggi nella riforma elettorale italiana. Dipartimento di Statistica, Probabilità e Statistiche Applicate, Università La Sapienza, Roma, Serie A - Ricerche, n. 21 (2005).

[21] A. Pennisi, F. Ricca, B. Simeone: Legge elettorale con paradosso. La Voce, 11 Novembre (2005).

[22] A. Pennisi, F. Ricca, B. Simeone: Bachi e buchi della legge elettorale italiana nell'allocazione biproporzionale di seggi, *Sociologia e Ricerca Sociale*, **79**, 55-76 (2006).

[23] F. Ricca, A. Scozzari, P. Serafini, B. Simeone: Error minimization methods in biproportional apportionment, *TOP*, **20**, 547-577, DOI: 10.1007/s11750-012-0252-x (2012).

[24] U.G. Rothblum: Generalized scaling satisfying linear equations, *Linear Algebra Appl.*, **114/115**, 765-783 (1989).

[25] A.K. Sen: *Collective choice and social welfare*. Holden-Day, San Francisco (1970).

[26] P. Serafini: Ottimizzazione a infinite dimensioni, visitato il: 27/12/2012, `http://users.dimi.uniud.it/~paolo.serafini/ottinfdim.pdf` (2000).

[27] P. Serafini: Allocation of the EU Parliament seats via integer linear programming and revised quotas, *Mathematical Social Sciences*, **63**, 107–113, DOI: 10.1016/j.mathsocsci.2011.08.006 (2012).

[28] P. Serafini, B. Simeone: Network flow methods for best approximation of target quotas in biproportional apportionment, *Networks*, **59**, 191-208, DOI 10.1002/net20434 (2011).

[29] P. Serafini, B. Simeone: Certificates of optimality: the third way to biproportional apportionment, *Social Choice and Welfare*, **38**, 247-268, DOI: 10.1007/s00355-010-0528-8 (2011).

[30] B. Simeone and F. Pukelsheim: *Mathematics and Democracy: Recent Advances in Voting Systems and Collective Choice*. Springer (2006).

[31] US Census: 2010 Census Data, visitato il: 5/1/2013, `http://www.census.gov/population/apportionment/data/2010_apportionment_results.html` (2010).

Indice