Esercizi di
MATEMATICA PER RCHITETTURA
prima parte: Algebra Lineare e Geometria

Avvertenze In quanto segue tutti i vettori hanno il medesimo punto d'origine O (l'origine dello spazio cartesiano).

Possiamo quindi identificare i punti P dello spazio cartesiano con i vettori che hanno origine in O e punto di arrivo in P. Grazie a questa identificazione, potremo usare indifferentemente la parola punto o vettore.

In uno spazio vettoriale o euclideo E, un sottospazio affine è un sottoinsieme del tipo

$$v + W := \{v + w | w \in W\}$$

dove W è un sottospazio vettoriale di E. In generale parleremo di sottospazi solo per indicare i sottospazi vettoriali, altrimenti parleremo di sottospazi affini. Rette e piani si intendono come sottospazi affini.

Esercizio 1. Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita sul campo K e sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare.
a) Si dica cosa significa che i vettori $v_1, ..., v_n$ di V sono *linearmente dipendenti*.
b) Si dia la definizione di applicazione *lineare*.
c) Siano $v_1, ..., v_n$ vettori di V tali che $f(v_1), ..., f(v_n)$ sono vettori linearmente indipendenti di W. Si provi che $v_1, ..., v_n$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo K.
a) Si dia la definizione di *dimensione* di V.
b) Si dia la definizione di *sottospazio* di V.
c) Si provi che se U e W sono sottospazi di V, allora $U \cap W$ e $U + W (:= \{u + w | u \in U,\ w \in W\})$ sono sottospazi di V.
d) Si provi che $dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W)$.

Esercizio 3. Si consideri, al variare del parametro λ in $\mathbf{R}$, il seguente sistema lineare a coefficienti in $\mathbf{R}$:

$$\left(\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 & \lambda - 1 \\ 2\lambda - 2 & 6 - 2\lambda & 2 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3\lambda \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

a) Si determini il numero delle soluzioni al variare del parametro λ in $\mathbf{R}$.
b) Si calcolino le soluzioni del sistema e del sistema omogeneo associato per $\lambda = 2$

Esercizio 4. Si consideri la seguente matrice a coefficienti reali.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Si determinino gli autovalori.
b) Per ogni autovalore λ, si determini l'autospazio V_λ relativo a λ.

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4, sia W un sottospazio di dimensione 2 di V e sia $f: W \to W$ un'applicazione lineare biiettiva.
a) Si provi che esistono applicazioni lineari $\overline{f}: V \to V$ tali che, per ogni $w \in W$, $\overline{f}(w) = f(w)$.

b) Si dica, giustificando la risposta, se ce n'è una sola o più di una

Esercizio 6. Siano V e W spazi vettoriali e sia $\phi\colon V \to W$ un'applicazione lineare. Si provi che
a) Se U è un sottospazio di V, allora anche $\phi(U)$ è un sottospazio di W. b) Se Z è un sottospazio di W, allora anche $\phi^{-1}(Z)$ è un sottospazio di V. (Ricordo che $\phi(U) = \{\phi(u) | u \in U\}$ e $\phi^{-1}(Z) = \{v \in V | \phi(v) \in Z\}$.

Esercizio 7. Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita sul campo K e sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare.
a) Si provi che $dim(V) = dim(ker(f)) + dim(Im(f)$ b) Si provi che, se U è un sottospazio di V, esiste un'applicazione lineare $g\colon V \to W$ tale che $U \leq ker(g)$.

Esercizio 8. Si consideri, al variare del parametro λ in $\mathbf{R}$, il seguente sistema lineare a coefficienti in $\mathbf{R}$:

$$\left(\begin{pmatrix} 2\lambda & \lambda & 3 \\ \lambda & \lambda & 2 \\ \lambda & \lambda & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Si determini il numero delle soluzioni al variare del parametro λ in $\mathbf{R}$.

Esercizio 9. Si consideri la seguente matrice a coefficienti in $\mathbf{R}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Si determinino gli autovalori.
b) Per ogni autovalore λ, si determini l'autospazio V_λ relativo a λ.

Esercizio 10. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo K e $f\colon V \to V$ un'applicazione lineare. Siano λ e μ due autovalori distinti di f e siano v e w due autovettori rispettivamente di λ e di μ. Si provi che il sottospazio $\langle v, w \rangle$, generato da v e w ha dimensione 2.

Esercizio 11. Si consideri, al variare del parametro λ in $\mathbf{R}$, il seguente sistema lineare a coefficienti in $\mathbf{R}$:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 2 & 1+\lambda & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda+1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Si determini il numero (possibilmente infinito) delle soluzioni al variare del parametro λ in $\mathbf{R}$.

Esercizio 12. Si consideri la seguente matrice a coefficienti in $\mathbf{R}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Si determinino gli autovalori.
b) Per ogni autovalore λ, si determini l'autospazio V_λ relativo a λ.
c) Si dica, giustificando la risposta, se la matrice è diagonalizzabile.

Esercizio 13. Siano $v_1, ..., v_n$ vettori a due a due ortogonali in uno spazio euclideo. Si provi che $v_1, ..., v_n$ sono linearmente indipendenti. (È più difficile degli altri esercizi, provare prima a fare i casi $n = 2$ e $n = 3$).

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n sul campo K e siano $v_1, ..., v_t$ vettori linearmente indipendenti di V.
a) Si provi che esistono dei vettori $v_{t+1}, ..., vn$ tali che $v_1, ..., v_t, v_{t+1}, ..., vn$ sia una base di V.
b) Si provi che, se U è un sottospazio di dimensione t di V e W è un sottospazio di dimensione $n-t$ di V, allora esiste un'applicazione lineare $g: V \to V$ tale che $U = ker(g)$ e $W = im(g)$.

Esercizio 14. Si consideri, al variare del parametro λ in $\mathbf{R}$, il seguente sistema lineare a coefficienti in $\mathbf{R}$:

$$\left(\begin{pmatrix} 2\lambda & \lambda & 1 \\ \lambda & 1-\lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Si determini il numero delle soluzioni al variare del parametro λ in $\mathbf{R}$.

Esercizio 15. Si consideri la seguente matrice a coefficienti in $\mathbf{R}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Si determinino gli autovalori.
b) Per ogni autovalore λ, si determini l'autospazio V_λ relativo a λ.

Esercizio 16. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $f: V \to V$ un'applicazione lineare tale che, per ogni $v \in V$, $(f \circ f \circ f \circ f)(v) = 1$. Sia λ un autovettore di f. Si provi che $\lambda^4 = 1$.

Esercizio 17 Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $f: V \to V$ un'applicazione lineare si provi che 0 è un autovalore di f se e solo se f non è iniettiva.

Esercizio 18. Siano V e W spazi vettoriali di dimensione finita sul campo K e sia $f: V \to W$ un'applicazione lineare.
a) Si provi che, se Z è un sottospazio di V, allora $f(Z)$ è un sottospazio di W.
b) Si provi che $dim(V) = dim(ker(f)) + dim(Im(f)$
c) Si provi che, se U è un sottospazio di W con $dim(W) \leq dim(V)$, allora esiste un'applicazione lineare $g: V \to W$ tale che $f(V) = U$.

Esercizio 19. Si consideri, al variare del parametro λ in $\mathbf{Z}/53\mathbf{Z}$, il seguente sistema lineare a coefficienti in $\mathbf{R}$:

$$\left(\begin{pmatrix} 2\lambda & \lambda & 3 \\ \lambda & \lambda & 2 \\ \lambda & \lambda & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ \lambda \end{pmatrix} \right).$$

Si determini il numero delle soluzioni al variare del parametro λ in $\mathbf{R}$.

Esercizio 20. Si consideri la seguente matrice a coefficienti in $\mathbf{R}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Si determinino gli autovalori.
b) Per ogni autovalore λ, si determini l'autospazio V_λ relativo a λ.

Esercizio 21. M una matrice $n \times n$ a corfficienti in un campo K e supponiamo che M abbia un unico autovalore t. Si provi che M è diagonalizzabile se e solo se M è la matrice scalare

$$\begin{pmatrix} t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t & 0\dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & t \end{pmatrix}.$$

Esercizio 22. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $f\colon V \to V$ un'applicazione lineare tale che ogni $v \in V \setminus \{0\}$ sia un autovettore di f. Si provi che esiste $k \in \mathbf{R}$ tale che $fv = kv$ per ogni $v \in V$ (e k non dipende da v).

Esercizio 23. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $f\colon V \to V$ un'applicazione lineare tale che, per ogni sottospazio U di V, $f(U) = U$. Si provi che esiste $k \in \mathbf{R}$ tale che $fv = kv$ per ogni $v \in V$ (e k non dipende da v).

Esercizio 23. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $f\colon V \to V$ un'applicazione lineare tale che, per ogni altra applicazione lineare $g\colon V \to V$, $f \circ g = g \circ f$. Si provi che esiste $k \in \mathbf{R}$ tale che $fv = kv$ per ogni $v \in V$ (e k non dipende da v).

Esercizio 24. Si consideri, al variare del parametro λ in $\mathbf{R}$, il seguente sistema lineare a coefficienti in $\mathbf{R}$:

$$\left(\begin{pmatrix} 2\lambda & \lambda & 3-\lambda \\ \lambda & \lambda & 2-\lambda \\ \lambda & \lambda & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Si determini il numero delle soluzioni al variare del parametro λ in $\mathbf{R}$.

Esercizio 25. Si consideri la seguente matrice a coefficienti in $\mathbf{R}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}.$$

a) Si determinino gli autovalori.
b) Per ogni autovalore λ, si determini l'autospazio V_λ relativo a λ.

Esercizio 26. Si calcoli il rango delle seguenti matrici.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 6 & 8 \\ 1 & 9 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -11 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 8 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 8 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 7 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

Esercizio 27. Si calcoli il determinante per ciascuna delle seguenti matrici e, se il determinante è diverso da 0, se ne calcoli l'inversa.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 7 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 8 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 8 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 11 \\ 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & 0 & 12 \\ 0 & 5 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

Esercizio 28. Sia A una matrice quadrata tale che in ogni riga ed in ogni colonna ci una sola entrata diversa da 0 e quell'entrata è uguale a 1 (come la terza matrice dell'esercizio precedente). Si provi che il determinante di A è 1 o -1

Esercizio 29. Sia A una matrice quadrata tale che in ogni riga ed in ogni colonna ci esattamente una sola entrata diversa da 0 (come la quarta matrice dell'esercizio precedente). Si provi che A è invertibile.

Esercizio 30. Sia A una matrice quadrata tale che in ogni riga ed in ogni colonna ci esattamente una sola entrata diversa da 0 (come la quarta matrice dell'esercizio precedente). Si provi che il prodotto delle entrate non nulle di A è $det(A)$ oppure $-det(A)$.

Esercizio 31 eseguire il prodotto righe per colonne delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \\ 4 & 5 \\ 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 10 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ -7 & -8 & 9 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{pmatrix};$$

Esercizio 32 Dire, giustificando la risposta, se esiste un'applicazione lineare f da $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^2$ tale che:

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e } f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 33 Dire, giustificando la risposta, se esiste un'applicazione lineare f da $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^2$ tale che:

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e } f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 34 Dire, giustificando la risposta, se esiste un'applicazione lineare f da $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^2$ tale che:

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{e } f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nei prossimi esercizi indichiamo con

$$(e_1, e_2, e_3)$$

la base canonica di $\mathbf{R^3}$, dove

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Esercizio 35 a) Si provi che la tripla

$$(3e_1 + e_2 - e_3,\ e_1 - e_3,\ 2e_1 + e_3)$$

è una base di $\mathbf{R}^3$.
b) Sia f l'applicazione lineare da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^3$ la cui matrice associata rispetto alla base

$$(3e_1 + e_2 - e_3,\ e_1 - e_3,\ 2e_1 + e_3)$$

di $\mathbf{R^3}$ è

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Si scriva la matrice associata a f rispetto alla base canonica (e_1, e_2, e_3) di $\mathbf{R^3}$

Esercizio 36 Sia f l'applicazione lineare da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^3$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica (e_1, e_2, e_3) di $\mathbf{R^3}$ è

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Si scriva la matrice associata a f rispetto alla base

$$(3e_1 + e_2 - e_3,\ e_1 - e_3,\ 2e_1 + e_3)$$

Esercizio 37 a) Si provi che le triple

$$(3e_1 + e_2 - e_3,\ e_1 - e_3,\ 2e_1 + e_3) \text{ e } (e_1 - e_2 - e_3,\ e_1 - e_3,\ 2e_1 + e_3)$$

sono due basi di $\mathbf{R}^3$.
b) Sia f l'applicazione lineare da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^3$ la cui matrice associata rispetto alla base

$$(3e_1 + e_2 - e_3,\ e_1 - e_3,\ 2e_1 + e_3)$$

di $\mathbf{R^3}$ è

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Si scriva la matrice associata a f rispetto alla base $(e_1 - e_2 - e_3,\ e_1 - e_3,\ 2e_1 + e_3)$ di $\mathbf{R^3}$

Esercizio 38 Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali V e W. Si provi che f è biiettiva se e solo se per ogni base $(v_1, \ldots, v_n)$ di V, $(f(v_i), \ldots, f(v_n))$ è una base di W.

Esercizio 39 Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali V e W. Si provi che f è iniettiva se e solo se per ogni n-upla $(v_1, \ldots, v_n)$ di vettori linearmente indipendenti di V, $f(v_i), \ldots, f(v_n)$ sono vettori linearmente indipendenti di W.

Esercizio 40 Sia $f\colon V \to W$ un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali V e W. Si provi che f è suriettiva se e solo se per ogni n-upla $(v_1, \ldots, v_n)$ di vettori di V che generano V, $f(v_i), \ldots, f(v_n)$ generano W.

Esercizio 41 Si provi che la composizione di applicazioni lineari è lineare.

Esercizio 42 Si provi che un'applicazione lineare è iniettiva se e solo se il suo nucleo è $\{\overline{0}\}$.

Esercizio 43 Sia W un sottoinsieme di uno spazio euclideo E e sia

$$W^{\perp} := \{v \in V | (v, w) = 0 \text{ per ogni } w \in W\}.$$

a) Si provi che $W^{\perp}$ è un sottospazio di V.
b) Si provi che $W \subseteq (W^{\perp})^{\perp}$.

Esercizio 44 Nello spazio euclideo tridimensionale si determini l'equazione del piano affine ortogonale al vettore

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e passante per il punto di coordinate (vettore)

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 45 Nello spazio euclideo tridimensionale si determini la distanza del piano affine di equazione $2x + y - z = 4$ dal vettore

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 46 Nello spazio euclideo tridimensionale si determini la distanza della retta affine data dall'intersezione dei piani affini di equazioni rispettivamente $2x + y - z = 4$ e $x - y + z = 0$ dal vettore

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 46 Nello spazio euclideo tridimensionale siano

$$v_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ w_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sia r_v la retta passante per il vettore v_1 e parallela al vettore v_2 e sia r_w la retta parallela al vettore w_1 e passante per il vettore w_2. Si determini la distanza tra r_v e r_w.

Esercizio 47 Nello piano euclideo bidimensionale si determini la distanza della retta di equazione $3x - y = 2$ dal vettore nullo.

Esercizio 48 Si consideri la conica di equazione $x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x + 3y = 100$.
a) Si dica se è un'ellisse, un'iperbole, una parabola o se è degenere.
b) Sii determinino centro ed assi.

Esercizio 49 Si consideri la conica di equazione $x+2xy+3y^2-2x+3y = 100$.
a) Si dica se è un'ellisse, un'iperbole, una parabola o se è degenere.
b) Si determinino centro ed assi.

Esercizio 50 Si consideri la conica di equazione $x+2xy-3y^2-2x+3y = 100$.
a) Si dica se è un'ellisse, un'iperbole, una parabola o se è degenere.
b) Si determinino centro ed assi.

Esercizio 51 Si consideri la conica di equazione $-x - 2xy - 3y^2 - 2x + 3y = 100$.
a) Si dica se è un'ellisse, un'iperbole, una parabola o se è degenere.
b) Si determinino centro ed assi.

Esercizio 52 Si consideri la conica di equazione $x^2 - 3y^2 - 2x + 3y = 100$.
a) Si dica se è un'ellisse, un'iperbole, una parabola o se è degenere.
b) Si determinino centro ed assi.

Esercizio 53 Si consideri la conica di equazione $x^2 - xy - 3y^2 = 100$.
a) Si dica se è un'ellisse, un'iperbole, una parabola o se è degenere.
b) Si determinino centro assi.

Esercizio 54 Nel piano euclideo determinare la distanza tra il vettore (punto) di coordinate

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

e la retta di equazione $2x - y + 1 = 0$.

Esercizio 55 Nel piano euclideo determinare la distanza tra il vettore (punto) di coordinate

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

e la retta di equazione $4x - 3y + 7 = 0$.

Esercizio 56 Nello spazio euclideo tridimensionale sia r la retta che si ottiene come intersezione dei due piani di equazioni rispettivamente

$$x + y - 2 = 0 \text{ e } 2y - z = 0$$

e sia s la retta incidente con la retta r, ortogonale ad essa e passante per il punto di coordinate

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Determinare le coordinate di un vettore parallelo a s.
b) Determinare le equazioni di due piani distinti contenenti s.

Esercizio 56 Nello spazio euclideo tridimensionale sia r la retta che si ottiene come intersezione dei piani di equazioni

$$3x - 2y - 1 = 0 \text{ e } 4y - 3z - 8 = 0.$$

Determinare l'equazione del piano P contenente r e ortogonale al piano di equazione 2x+2y+z=0 (**Nota:** due piani P e Q sono ortogonali se e solo esistono due vettori v_P e v_Q ortogonali rispettivamente ai piani P e Q, tali che v_p è ortogonale a v_Q.)

Esercizio 57 Nel piano euclideo determinare l'equazione cartesiana del cerchio raggio 1 e centro

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 58 Nel piano euclideo determinare l'equazione cartesiana del cerchio raggio $\sqrt{2}$ e centro

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 59 Nel piano euclideo determinare l'equazione cartesiana del cerchio raggio $1/2$ e centro

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 60 Nel piano euclideo determinare l'equazione cartesiana determinare centro e raggio del cerchio di equazione

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$$

Esercizio 61 Nel piano euclideo determinare l'equazione cartesiana determinare centro e raggio del cerchio di equazione

$$x^2 + y^2 + 8x - 10y + 32 = 0$$