1. Si consideri un disco gestito con politica LOOK. Inizialmente la testina è posizionata sul cilindro 24, ascendente; lo spostamento ad una traccia adiacente richiede 1 ms. Al driver di tale disco arrivano richieste per i cilindri 77, 43, 30, 80, rispettivamente agli istanti 0 ms, 20 ms 50 ms, 55 ms. Si trascuri il tempo di latenza.

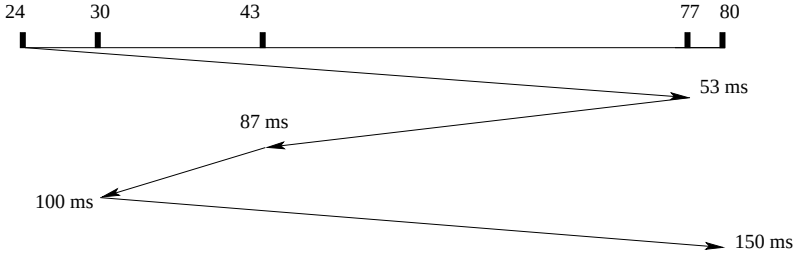
   (a) In quale ordine vengono servite le richieste?

   (b) Il tempo di attesa di una richiesta è il tempo che intercorre dal momento in cui è sottoposta al driver a quando viene effettivamente servita. Qual è il tempo di attesa medio per le quattro richieste in oggetto?

   (c) Se invece della politica LOOK, si considera la politica SSTF, in quale ordine vengono servite le richieste? Qual è il tempo di attesa medio in questo caso?

   Soluzione:

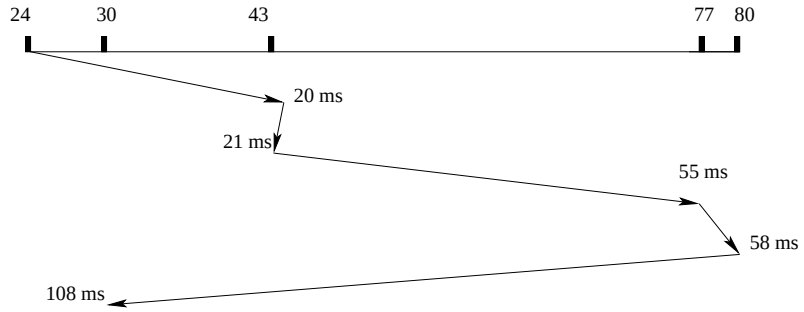
   (a) l'ordine in cui vengono servite le richieste con la politica LOOK è rappresentato dal seguente grafico:



   All'istante 0, la testina inizia a muoversi alla velocità di 1 traccia/ms verso il cilindro 77. Dopo 20ms, quando arriva la richiesta per il cilindro 43, la testina si trova già oltre, sul cilindro 44, la direzione è ascendente e quindi non viene servita. Stesso discorso per l'istante 50, quando arriva la richiesta per il cilindro 30. La testina contina il movimento verso il cilindro 77, ove giunge all'istante $77 - 24 = 53$ms. Dopo aver servito questa richiesta, ci sono le due richieste a 30 e 43 in sospeso; la testina inverte quindi la direzione, verso la traccia 30. Quando, dopo 2ms, arriva la richiesta per il cilindro 80, è troppo tardi: la testina continua a scendere fino al cilindro 43 (che viene raggiunto dopo $77 - 43 = 34$ms, ossia all'istante $53 + 34 = 87$ms) e poi al cilindro 30 (che viene raggiunto dopo altri $43 - 30 = 13$ms, ossia all'istante $87 + 13 = 100$ms). Infine, viene invertita nuovamente la direzione per raggiungere il cilindro 80 dopo $80 - 30 = 50$ms, ossia all'istante $100 + 50 = 150$ms. Quindi l'ordine è: 77, 43, 30, 80.

   (b) I tempi di attesa per le quattro richieste sono rispettivamente: per il cilindro 77: 53-0=53ms; per il cilindro 43: 87-20=67ms; per il cilindro 30: 100-50=50ms; per il cilindro 80: 150-55 = 95ms. La media è $\frac{53+67+50+95}{4} = 66,25$ ms.

   (c) Nel caso della politica SSTF l'ordine in cui vengono servite le richieste è rappresentato dal seguente grafico:



All'istante 0 la testina inizia a muoversi verso il cilindro 77; dopo 20ms, quando arriva la richiesta per il cilindro 43, la testina si trova sul cilindro 44 ed inverte la direzione (siccome il cilindro 43 è più vicino del cilindro 77). Quindi dopo 21ms viene servita la richiesta per il cilindro 43. La testina riprende poi a muoversi verso il cilindro 77: quando, dopo altri 29ms, arriva la richiesta per il cilindro 30, la testina si trova sul cilindro 72 e quindi prosegue verso il cilindro 77 (in quanto più vicino del cilindro 30). Quindi la richiesta per il cilindro 77 viene servita all'istante 55ms. A questo punto arriva anche la richiesta per il cilindro 80 che viene quindi servita all'istante 58ms. Infine la testina inverte la direzione per andare a servire l'ultima richiesta rimasta, ovvero, quella per il cilindro 30 (richiesta servita all'istante 108ms). Quindi l'ordine è: 43, 77, 80, 30. I tempi di attesa per le quattro richieste sono rispettivamente: per il cilindro 43: 21-20=1ms; per il cilindro 77: 55-0=55ms; per il cilindro 80: 58-55=3ms; per il cilindro 30: 108-50 = 58ms. La media è $\frac{1+55+3+58}{4} = 29,25$ ms.

2. Un computer ha quattro frame, i cui istanti di caricamento, di ultimo riferimento e i reference bit sono riportati nella seguente tabella:

Frame	Caric.	Rifer.	R
0	150	279	1
1	231	280	1
2	189	272	0
3	212	276	1

Dire quale pagina verrebbe liberata dall'algoritmo FIFO, da LRU e da CLOCK (in questo caso si supponga che l'ultimo frame controllato sia il 3).

Soluzione: L'algoritmo FIFO, in base ai dati della tabella, avrà la coda 0, 2, 3, 1 e quindi sceglierà la pagina nel frame 0. LRU invece avrà la pila 1, 0, 3, 2, dove la pagina del frame 2 sarà quella riferita meno recentemente e quindi quella liberata dall'algoritmo. Infine CLOCK avrà la stessa coda di FIFO, ovvero, 0, 2, 3, 1 ma la gestirà in modo circolare, dando una seconda chance alle pagine con reference bit impostato a 1. Quindi (siccome viene detto che l'ultimo frame controllato è stato il 3) viene controllato dapprima il frame 1: siccome il reference bit è 1, quest'ultimo viene impostato a 0 e la pagina del frame risparmiata. Il controllo prosegue quindi con i frame 0 e 1 che, avendo entrambi il reference bit impostato a 1, vengono saltati (impostando i rispettivi reference bit a 0). Si giunge così al frame 2 che,

avendo il reference bit impostato a 0, viene scelto dall'algoritmo e la pagina che contiene viene scelta per la sostituzione.

3. Supponendo di avere un sistema con quattro frame e otto pagine, addottando una politica di rimpiazzamento FIFO, quanti page fault si verificheranno con la reference string seguente?

   0 1 7 2 3 2 7 1 0 3

   (Si assuma che i quattro frame siano inizialmente vuoti.) Ripetere il problema per LRU.

   Soluzione: inizialmente FIFO caricherà nei quattro frame le pagine 0, 1, 7, 2 provocando quattro page fault. Poi scaricherà la pagina 0 e caricherà la pagina 3 (1 page fault) originando la cosa 1, 7, 2, 3. I successivi riferimenti alle pagine 2, 7, 1 non provocheranno ulteriori page fault, lasciando la coda invariata. Il riferimento a 0 invece provocherà 1 page fault scaricando la pagina 1 e generando la coda 7, 2, 3, 0. Infine, l'ultimo riferimento alla pagina 3 non induce page fault, in quanto già presente in memoria. Quindi in totale si hanno 6 page fault.

   Simuliamo ora il funzionamento di LRU sulla reference string data:

	0	1	7	2	3	2	7	1	0	3
		0	1	7	2	3	2	7	1	0
			0	1	7	7	3	2	7	1
				0	1	1	1	3	2	7
					0	0	0	0	3	2
	P	P	P	P	P				P	P

   Abbiamo quindi 7 page fault per LRU.

4. Si consideri un sistema con un controller con I/O guidato da interrupt, ma senza DMA, su bus PCI (che trasporta parole di 4 byte a 66,6 MHz), con un buffer interno di 4 Kbyte. Se la gestione di ogni interrupt costa 2 μsec e un accesso in RAM (a parole di 4 byte) costa 10 nsec, quanto si impiega per gestire l'input di 4 Kbyte? Qual è la banda massima (in MB/sec) di input sostenibile da questo sistema?

   Soluzione: Per leggere una parola di 4 byte (32 bit) dal controller alla CPU ci si mette $1/(66,6 * 10^6) = 15$ nsec; per trasferire tale parola alla RAM servono altri 10 nsec. Quindi per trasferire 4KB=1024 parole servono $(10 + 15) * 1024 = 25600nsec = 25,6\mu sec$. A questo bisogna aggiungere $2\mu sec$ per l'interrupt, per un totale di $27,6\mu sec$. La banda massima $4KB/27,6\mu sec = 144927KB/sec = 141,5Mbyte/sec$.

5. Si consideri un sistema con memoria paginata ad un livello, la cui page table sia mantenuta in memoria principale. Il tempo di accesso alla memoria principale sia $t = 50ns$.

   (a) Qual è il tempo effettivo di accesso alla memoria?

(b) Aggiungendo un TLB, con tempo di accesso $\epsilon = 1ns$, quale hit rate dobbiamo avere per un degrado delle prestazioni del 5% rispetto a t?

Soluzione:

(a) $EAT = 2t = 100$ns (50ns per recuperare il frame number, 50ns per l'indirizzo reale)

(b) Un degrado del 5% significa che $EAT = 1,05 * 50 = 52,5$ns. Ricordando che $EAT = \epsilon + \alpha t + (1-\alpha)(2t)$, abbiamo che $EAT = \epsilon + 2t - \alpha t$, e quindi $\alpha = \frac{2t+\epsilon-EAT}{t} = \frac{100+1-52,5}{50} = 0,97$, ossia un hit rate del 97%.

6. Si consideri un sistema con quattro processi allocati in memoria principale. Tenendo conto del fatto che tali processi sono in attesa di eventi di I/O per metà del loro tempo, calcolare la percentuale di tempo di CPU "sprecato".

   Soluzione: sia $p = 0,5$ la probabilità che un processo sia in attesa di eventi di I/O. Supponendo che i quattro processi in esecuzione siano indipendenti, la probabilità che siano tutti contemporaneamente in attesa di eventi di I/O sarà il prodotto delle singole probabilità. Tale evento implica ovviamente lo "spreco" del tempo di CPU, in quanto in tale occasione la CPU non può essere allocata a nessun altro processo (essendoci per ipotesi soltanto quattro processi in esecuzione). Quindi lo spreco ammonta a $(0,5)^4 = 0,0625$, ovvero, a circa il 6% del tempo totale.

7. Si consideri la seguente matrice A:

   $$\texttt{var } A : \texttt{ array } [1..100] \texttt{ of array } [1..100] \texttt{ of } integer;$$

   dove l'elemento $A[1][1]$ sia memorizzato all'indirizzo 200 in un sistema con paginazione della memoria con dimensione delle pagine di 200. Un piccolo processo che manipola la matrice si trova in pagina 0 (locazioni da 0 a 199); quindi ogni istruzione verrà recuperata dalla pagina 0.

   Avendo a disposizione tre frame, si indichi quanti page fault verranno generati dai seguenti frammenti di codice, utilizzando LRU come politica di rimpiazzamento delle pagine (si assuma che inizialmente il primo frame contenga il processo e gli altri siano vuoti):

   a)
   ```
   for j := 1 to 100 do
       for i := 1 to 100 do
           A[i][j] := 0;
   ```

   b)
   ```
   for i := 1 to 100 do
       for j := 1 to 100 do
           A[i][j] := 0;
   ```

   Soluzione: la matrice è costituita da 10.000 elementi (100×100); nel caso del codice a), il ciclo `for` esterno fissa l'indice della colonna, mentre il ciclo `for` interno fissa l'indice della riga. Quindi la sequenze di comandi di azzeramento degli elementi della matrice sarà la seguente:

   ```
   A[1][1]:=0;
   A[2][1]:=0;
   ...
   A[100][1]:=0;
   A[1][2]:=0;
   A[2][2]:=0;
   ```

```
...
A[100][2]:=0;
...
A[1][100]:=0;
A[2][100]:=0;
...
A[100][100]:=0;
```

dato che la memorizzazione della matrice avviene per righe e ogni pagina può contenere 200 elementi, ovvero, due righe della matrice, vi sará un page fault ogni due istruzioni (infatti un frame rimarrà sempre occupato dalla pagina contenente il codice, dato che questo viene riferito ad ogni istruzione e rimangono soltanto due frame per le pagine dei dati). In totale avremo quindi 100×50=5.000 page fault.

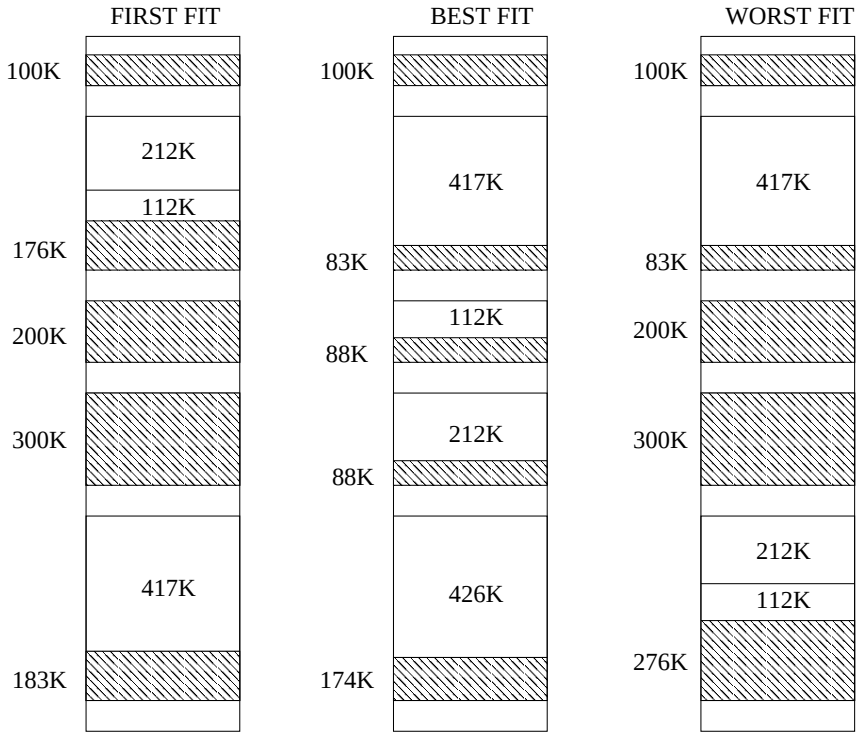
Nel caso del codice b) invece avremo una sequenza di azzeramenti del tipo seguente:

```
A[1][1]:=0;
A[1][2]:=0;
...
A[1][100]:=0;
A[2][1]:=0;
A[2][2]:=0;
...
A[2][100]:=0;
...
A[100][1]:=0;
A[100][2]:=0;
...
A[100][100]:=0;
```

e quindi un numero di page fault complessivi pari a 50.

8. Date le zone di memoria libera di 100K, 500K, 200K, 300K e 600K (in quest'ordine), descrivere come gli algoritmi First-fit, Best-fit e Worst-fit allocherebbero processi delle dimensioni di 212K, 417K, 112K e 426K (in quest'ordine). Quale dei tre algoritmi utilizza la memoria nel modo più efficiente?

   Soluzione: i tre algoritmi allocheranno i processi dando origine alle configurazioni di memoria seguenti (le zone tratteggiate rappresentano i "buchi" residui in seguito alle allocazioni operate):



Sia il First-Fit che il Worst-Fit non riescono ad allocare il quarto processo (dimensione: 426K). Quindi l'algoritmo che in questo caso gestisce meglio le richieste è il Best-Fit.

9. Si consideri uno spazio di indirizzamento logico di otto pagine di 1024 parole ognuna, mappate su una memoria fisica di 32 frame.

   (a) Da quanti bit è costituito l'indirizzo logico?

   (b) Da quanti bit è costituito l'indirizzo fisico?

   Soluzione: siccome $8 = 2^3$, $1024 = 2^10$ e $32 = 2^5$, si ha:

   (a) indirizzo logico: 3 (n. di pagina) + 10 (offset nella pagina) = 13 bit,

   (b) indirizzo fisico: 5 (n. del frame) + 10 (offset nel frame) = 15 bit.

10. Si consideri la seguente *segment table*:

Segmento	Base	Lunghezza
0	219	600
1	2300	14
2	90	100
3	1327	580
4	1952	96

Quali sono gli indirizzi fisici corrispondenti ai seguenti indirizzi logici?

- 0, 430
- 1, 10
- 2, 500

- 3, 400
- 4, 112

Soluzione:

- 0, 430 corrisponde all'indirizzo fisico 219+430=649 (indirizzo valido dato che 430<600);
- 1, 10 corrisponde all'indirizzo fisico 2300+10=2310 (indirizzo valido dato che 10<14);
- 2, 500 non corrisponde ad un indirizzo fisico valido dato che 500>100;
- 3, 400 corrisponde all'indirizzo fisico 1327+400=1727 (indirizzo valido dato che 400<580);
- 4, 112 non corrisponde ad un indirizzo valido dato che 112>96.

11. Si consideri l'algoritmo di scheduling nel sistema Unix tradizionale. Supponendo che un quanto = 5 tic = 100 msec e che all'istante 0 si trovino in coda ready 3 processi nuovi, nell'ordine A, B, C, tutti con priorità uguale a 0 e CPU burst di 150, 100 e 200 tic rispettivamente, simulare l'esecuzione dei 3 processi nell'intervallo di tempo 0–2 secondi.

    Soluzione: la simulazione dell'esecuzione è data dalla seguente tabella (si ricordi che l'algoritmo di scheduling nel sistema Unix tradizionale ricalcola i tempi di CPU e le priorità ogni secondo secondo le equazioni CPU_j=$\mathrm{CPU}_j/2$ e Pr_j=CPU_j+nice_j, dove nice_j in questo caso vale 0):

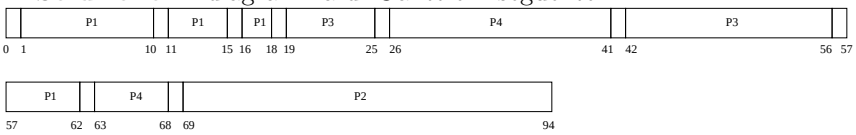
	Pr_A	CPU_A	Pr_B	CPU_B	Pr_C	CPU_C
0 sec	0	0	0	0	0	0
	0	5	0	0	0	0
	0	5	0	5	0	0
	0	5	0	5	0	5
	0	10	0	5	0	5
	0	10	0	10	0	5
	0	10	0	10	0	10
	0	15	0	10	0	10
	0	15	0	15	0	10
	0	15	0	15	0	15
	0	20	0	15	0	15
1 sec	10	10	7	7	7	7
	10	10	7	12	7	7
	10	10	7	12	7	12
	10	10	7	17	7	12
	10	10	7	17	7	17
	10	10	7	22	7	17
	10	10	7	22	7	22
	10	10	7	27	7	22
	10	10	7	27	7	27
	10	10	7	32	7	27
	10	10	7	32	7	32
2 sec	5	5	16	16	16	16

12. Si consideri un sistema con scheduling a priorità con tre code, A, B, C, di priorità decrescente, con prelazione tra code. Le code A e B sono round robin con quanto di 15 e 20 ms, rispettivamente; la coda C è FCFS. Se un processo nella coda A o B consuma il suo quanto di tempo, viene spostato in fondo alla coda B o C, rispettivamente. Si supponga che i processi P_1, P_2, P_3, P_4 arrivino rispettivamente nelle code A, C, B, A, con CPU burst e tempi indicati nella tabella seguente (si assuma pari a 1 ms il tempo di latenza del kernel):

	arrivo	burst
P_1	0	20ms
P_2	10	25ms
P_3	15	20ms
P_4	25	20ms

Si determini il diagramma di Gantt relativo all'esecuzione dei quattro processi ed i tempi medi di attesa e di reazione.

Soluzione: il diagramma di Gantt è il seguente:



Il tempo medio di attesa è $\frac{42+59+21+23}{4} = 36,25$, mentre quello medio di reazione è $\frac{1+59+4+1}{4} = 16,25$.

13. Si consideri un processo con text size = 2M, data size = 500K, stack size = 200K, process control block = 5K. La trap al kernel e ritorno impiega $1\mu sec$, e la CPU copia una parola di 4 byte, tra due locazioni di memoria, in 10 nsec.

    (a) Si dia una stima del tempo impiegato da una `fork()`, nel caso in cui il sistema operativo adotti la condivisione del codice ma non il copy-on-write.

    (b) Come sopra, ma con copy-on-write.

    (c) Per ottimizzare la memoria, conviene usare il copy-on-write sui segmenti o sulle pagine?

    Soluzione:

    (a) La quantità di memoria da copiare 500+200+5=705K, ossia 180.480 parole, per complessivi 1,8 msec, a cui bisogna aggiungere $1\mu sec$ per la system call (che non cambia sostanzialmente il valore).

    (b) In questo caso, si tratta solo di copiare i 5K del PCB, quindi 1280*10 = 12800 nsec, a cui si aggiunge $1\mu sec$ per la system call, per un totale di $13,8\mu sec$.

    (c) Sulle pagine, così basta allocare memoria soltanto per le pagine modificate e non gli interi segmenti. Questo può tuttavia causare più fault, e quindi un maggiore overhead per il meccanismo di trap al kernel.

14. (a) Si descriva brevemente il concetto di *working set* $WS(t, \Delta)$, all'istante t con intervallo Δ.

    (b) Si consideri la seguente stringa di riferimenti (partendo con $t = 0$):

    $$2 \quad 6 \quad 5 \quad 7 \quad 7 \quad 7 \quad 7 \quad 5 \quad 1 \quad 6 \quad 4$$

    Cosa è $WS(10, 8)$, ossia dopo l'ultimo accesso?

    (c) Nel precedente esempio, quanti page fault ci sono complessivamente con $\Delta = 4$ (supponendo che in ogni istante si mantenga in memoria esattamente il solo working set)?

Soluzione:

(a) Il working set è un'approssimazione della località del processo, ossia è l'insieme di pagine "attualmente" riferite. In generale $WS(t, \Delta)$=insieme delle pagine riferite negli accessi $[(t - \Delta + 1), t]$.

(b) $WS(10, 8) = \{1, 4, 5, 6, 7\}$

(c) 8 page fault. Basta fare la matrice seguente, facendo attenzione a togliere le pagine man mano che escono dal working set, e segnando fault quando bisogna (ri)mettercele:

2	6	5	7	7	7	7	5	1	6	4
2	6	5	7	7	7	7	5	1	6	4
	2	6	5	5	5		7	5	1	6
		2	6	6				7	5	1
			2						7	5
p	p	p	p				p	p	p	p

15. Si consideri un file system Unix-like (UFS o EXT2) con blocchi da 4K, su un disco con $t_{seek} = 10ms$, a 7200 RPM. In tale file system, sia stato aperto un file i cui blocchi siano sulla stessa traccia del rispettivo inode.

    (a) Quanto si impiega per accedere direttamente alla posizione 10000 del file?

    (b) e alla posizione 100000?

Soluzione:

(a) La posizione 10000 cade nel terzo blocco, che è uno dei blocchi diretti. Per cui basta 1 accesso al disco (l'inode è già stato caricato in memoria al momento dell'apertura), che costa $t_{seek} + t_{latenza} = 10 + 60/(2 * 7, 2) = 14, 17msec$.

(b) La posizione 100000 cade in uno dei primi indiretti, per cui è necessario accedere 2 volte al disco (una volta anche per il blocco indiretto), dove però il tempo di seek si conta una volta sola perché i blocchi sono sulla stessa traccia. In totale $10 + 4, 17 + 4, 17 = 18, 33msec$.

16. Si consideri un'implementazione di un filesystem con allocazione indicizzata con indice concatenato in cui:

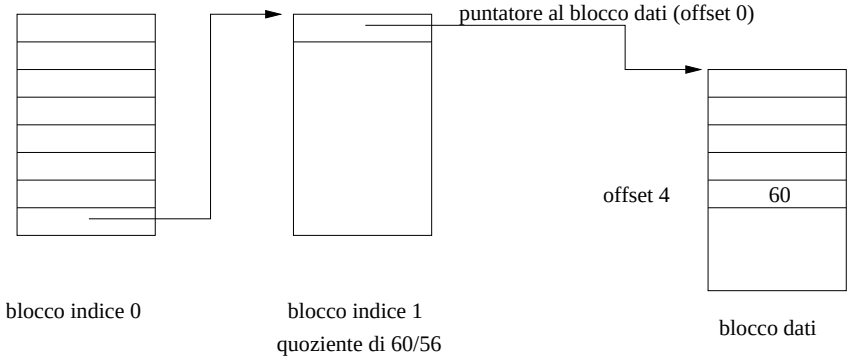
    - la dimensione di un blocco sia di 8 byte;
    - un indirizzo richieda un byte per la sua memorizzazione.

Si calcoli l'indirizzo fisico corrispondente all'indirizzo logico 60 per un dato file.

Soluzione: prima di tutto bisogna determinare il blocco indice da consultare:

$$60/(8 \times 7) = 60/56$$

il quoziente 1 rappresenta il blocco indice corretto, mentre il resto 4 viene ulteriormente diviso per la dimensione del blocco (8) fornendo il quoziente 0 (offset all'interno del blocco indice 1) ed il resto 4 che rappresenta l'offset all'interno del blocco dati (puntato, per i calcoli appena fatti, dal primo byte del blocco indice 1):



17. Al driver di un disco arrivano, nell'ordine, richieste per i cilindri 10, 22, 24, 4, 39, 6, 40. Supponendo che la testina si trovi inizialmente sul cilindro 20, e che il tempo necessario per spostare la testina di 1 cilindro sia di 6ms, quanto tempo viene speso per lo spostamento della testina per servire tutte le richieste con la politica FCFS, con la politica SSTF, e con la politica LOOK (o dell'ascensore; supponete che la direzione iniziale sia ascendente)?

    Soluzione: Per FCFS: lo spostamento totale è dato dalla somma delle differenze tra il cilindro attuale e il successivo, partendo dal cilindro 20. $(20-10)+(22-10)+(24-22)+(24-4)+(39-4)+(39-6)+(40-6) = 10+12+2+20+35+33+34 = 146$ cilindri $= 876ms$

    Per SSTF: lo spostamento totale è dato dalla somma delle differenze tra il cilindro attuale e il più vicino tra quelli rimanenti, partendo dal cilindro 20. $(22-20)+(24-22)+(24-10)+(10-6)+(6-4)+(39-4)+(40-39) = 2+2+14+4+2+35+1 = 60$ cilindri $= 360ms$

    Per LOOK: lo spostamento totale è dato dalla distanza tra il cilindro attuale (20) e il massimo nella direzione attuale (40), più la distanza da tale massimo al cilindro minimo (4): $(40-20)+(40-4) = 56$ cilindri $= 336ms$

18. Si consideri un processo che generi la seguente stringa di riferimenti alle pagine virtuali:

    0 1 2 0 1 4 5 0 2 3

    (a) Se il processo ha 3 frame, gestiti con LRU, quanti page fault vengono generati?

(b) Qual è il numero minimo di frame necessario per minimizzare i page fault?

Soluzione:

(a) Si generano 8 page fault:

	0	1	2	0	1	4	5	0	2	3
		0	1	2	0	1	4	5	0	2
			0	1	2	0	1	4	5	0
						2	0	1	4	5
							2	2	1	4
										1
	P	P	P			P	P	P	P	P

(b) Il minimo è 6 page fault (perché il processo accede a 6 pagine). Per determinare il numero minimo di frame per avere solo 6 page fault, si può procedere empiricamente, ripetendo la simulazione aumentando via via il numero di frame disponibili e fermandosi non appena si riscontrano solo 6 page fault sulla reference string data. Oppure si può sfruttare la *distance string*, che nel caso in questione risulta essere la seguente:

$$\infty \ \infty \ \infty \ 3 \ 3 \ \infty \ \infty \ 4 \ 5 \ \infty$$

Si ricorda che la distance string rappresenta la distanza fra la posizione di una pagina nel modello e la prima posizione, ovvero, quella nella prima riga della matrice (contando anche la casella di partenza) nel momento in cui la pagina stessa viene riferita. Se una pagina non è presente nella matrice, allora la sua distanza, quando viene riferita è ∞. Ad esempio nella simulazione della parte a) dell'esercizio, quando viene riferita inizialmente la pagina 0, la sua distanza è ∞ (dato che ancora non era presente nella matrice). Invece il secondo riferimento alla pagina 0 ha come distanza 3, in quanto la posizione precedentemente occupata dalla pagina 0 nella matrice si trova nella terza riga.

Indichiamo ora con C_i il numero di volte che il numero i compare nella distance string; nel caso in questione abbiamo: $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 2$, $C_4 = 1$, $C_5 = 1$, $C_\infty = 6$. Indicando poi con m il numero di frame e con n il numero più grande che compare nella distance string, indichiamo con $F_m = \Sigma_{k=m+1}^{n} C_k + C_\infty$ il numero di page fault che si verificano con m frame e con la reference string data. L'intuizione è la seguente: se ho a disposizione m frame i page fault saranno provocati dai riferimenti a pagine che "distano" almeno $m + 1$ dal top della matrice e dal numero di ∞ (ovvero da riferimenti a pagine non ancora presenti nel modello). Nel nostro caso abbiamo: $F_1 = 10$, $F_2 = 10$, $F_3 = 8$, $F_4 = 7$, $F_5 = 6$, quindi il numero minimo di frame che minimizza i page fault è 5.