# Proprietà strutturali dei sistemi lineari invarianti

F. Blanchini and F.A. Pellegrino

23 maggio 2007

# Indice

# Capitolo 1

# Introduzione

Dalla rappresentazione di stato di un sistema dinamico possiamo dedurre delle informazioni fondamentali sulle interazioni ingresso–stato–uscita. Questa parte del lavoro tratta questo problema.

In particolare studieremo le proprietà di raggiungibilità/controllabilità di un sistema che riguardano, rispettivamente, il rapporto ingresso–stato e il rapporto stato–uscita. In parole povere possiamo dire che un sistema è raggiungibile se attraverso una opportuna azione di ingresso possiamo portare il suo stato in un punto arbitrario dello spazio degli stati. Diremo invece che un sistema è osservabile se dall'osservazione dell'uscita, assunto noto l'ingresso, è possibile risalire allo stato del sistema.

Questo tipo di analisi sarà condotta nel caso di sistemi lineari, per i quali sono possibili degli sviluppi analitici basati sui solidi strumenti forniti dall'algebra lineare. Verranno forniti dei criteri algebrici per lo studio della raggiungibilità e osservabilità. Vedremo inoltre come la mancanza di raggiungibilità o di osservabilità possano essere viste come "patologie del sistema che hanno come conseguenza l'incongruenza tra la rappresentazione ingresso–uscita (funzione di trasferimento) e la rappresentazione di stato. Queste patologie sono già, in parte, note da corsi precedenti in quanto si rivelano come cancellazioni nella funzione di trasferimento.

# Capitolo 2

# Raggiungibilità e controllabilità

Il problema della raggiungibilità si occupa del legame ingresso-stato di un sistema. In termini generali, il problema consiste nel determinare come può un agente avente facoltà di decidere istante per istante l'azione di ingresso influire sull'evoluzione di un sistema. Le definizioni che seguono sono valide in generale per un sistema dinamico del tipo

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

(trattandosi del rapporto tra stato e ingresso, la trasformazione di uscita non ha alcun ruolo)

**Definizione: Raggiungibilità e Controllabilità in un intervallo**. Dati gli stati $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ e l'intervallo $[t_1, t_2]$ se esiste un ingresso $u(\cdot)$ tale che per $x(t_1) = \bar{x}_1$ abbiamo che $x(t_2) = \bar{x}_2$ allora $\bar{x}_2$ si dice *raggiungibile da* $\bar{x}_1$ nell'intervallo $[t_1, t_2]$ mentre $\bar{x}_1$ si dice *controllabile a* $\bar{x}_2$ in tale intervallo.

Nella pratica capita spesso che esista uno stato privilegiato 0 e un istante iniziale che possiamo definire come tempo 0. Allora valgono le seguenti definizioni.

**Definizione: Raggiungibilità da 0.** Il vettore di stato $\bar{x} \in \Re^n$, si dice *raggiungibile* (da 0) nell'intervallo di tempo $[0, \tau]$ se esiste un ingresso $u(\cdot)$ tale che, per $x(0) = 0$, risulta $x(t) = \bar{x}$.

**Definizione: Controllabilità a 0.** Il vettore di stato $\bar{x} \in \Re^n$, si dice *controllabile*(a 0) nell'intervallo $[0, \tau]$ se esiste $u(\cdot)$ tale che $x(0) = \bar{x} \Longrightarrow x(t) = 0$.

L'insieme di tutti gli stati che sono raggiungibili nell'intervallo $[0, \tau]$ viene detto insieme di raggiungibilità e denotato come

$$X_r(\tau),$$

mentre l'insieme degli stati controllabili, o insieme di controllabilità viene denotato come

$$X_c(\tau).$$

Noi ci occuperemo esclusivamente della raggiungibilià di sistemi lineari e invarianti del tipo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{2.1}$$

dove $x(k) \in \Re^n$, $u(k) \in \Re^m$, $y(k) \in \Re^p$. Per questa categoria di sistemi vale la seguente fondamentale

**Proprietà**: $X_r(\tau)$ e $X_c(\tau)$ sono sottospazi di $\Re^n$ $\forall$ $\tau$.

La dimostrazione è banale e lasciata come esercizio.

## 2.1 Raggiungibilità e controllabilità per sistemi lineari invarianti a tempo continuo

Lo studio della raggiungibilità e della controllabilità nei sistemi lineari consiste nella caratterizzazione dei sottospazi $X_r(\tau)$ e $X_c(\tau)$. Presenteremo nei dettagli la determinazione di $X_r(\tau)$, e faremo un breve cenno per quanto riguarda $X_c(\tau)$, la cui caratterizzazione segue una strada pressoché identica.

### 2.1.1 Raggiungibilità

**Definizione: Matrice di raggiungibilità.** Dato un sistema del tipo (2.1) la matrice $n \times (nm)$

$$R = [B|AB|A^2B|\dots|A^{n-1}B]$$

è detta *matrice di raggiungibilità*

**Teorema.** Il sottospazio di raggiungibilità $X_r(\tau)$ è indipendente da $\tau > 0$. Si ha che

$$X_r(\tau) = Ra[R]$$

. *Dimostrazione.* Dall'espressione di stato di un sistema dinamico lineare a tempo continuo abbiamo che l'insieme di tutti gli stati raggiungibili è l'insieme di tutti i vettori ottenibli come

$$X_r(\tau) = \{x = \int_0^\tau e^{A(\tau-\sigma)}Bu(\sigma)d\sigma, \quad \forall u(\cdot)\} \tag{2.2}$$

Per dimostrate che $X_r(\tau) = Ra[R]$, noi faremo vedere che i loro ortogonali coincidono, precisamente

$$X_r(\tau)^\perp = Ra[R]^\perp$$

il che equivale a dire che $X_r(\tau) = Ra[R]$[1]. L'insieme ortogonale all'insieme degli stati raggiungibili è l'insieme

$$X_r^\perp(\tau) = \{z|z^Tx = 0 \ \forall x \in X_r(\tau)\}$$

[1] questo è vero in uno spazio a dimensione finita

Affinché sia verificata la condizione $z^\perp x = 0 \ \forall x \in X_r(\tau)$, deve valere la relazione:

$$z^T \int_0^\tau e^{A(\tau-\sigma)} Bu(\sigma)d\sigma = 0, \quad \forall\ u(\cdot)$$

ovvero, per qualsiasi $u(\cdot)$

$$\Rightarrow \int_0^\tau z^T e^{A(\tau-\sigma)} Bu(\sigma)d\sigma = 0.$$

Essendo $u(\sigma)$ arbitrario, l'unica possibilità affinchè lintegrale sia nullo è che la funzione $z^T e^{A(\tau-\sigma)}B$ sia nulla per ogni $\sigma$ appartenente all'intervallo $[0, \tau]$ ovvero che

$$z^T e^{A(\tau-\sigma)} B \equiv 0 \Rightarrow$$

Usando lo sviluppo in serie di $e^{At}$

$$\begin{aligned} z^T e^{A(\tau-\sigma)} B &= z^T \{I + A(\tau-\sigma) + \frac{[A(\tau-\sigma)]^2}{2!} + \ldots\} B \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} z^T \frac{[A(\tau-\sigma)]^i}{i!} B = 0 \end{aligned}$$

Per il *criterio di identità delle serie di potenze*[2] ciò implica:

$$z^T A^k B = 0 \quad \forall k > 0\ .$$

Questa condizione è equivalente alla

$$z^T A^k B = 0 \quad \forall k \in [0, n-1]\ .$$

L'implicazione diretta è ovvia. L'implicazione inversa deriva dal teorema di Cayley-Hamilton[3], che ci assicura che la potenza $k$-esima della matrice $A$ può essere espressa come combinazione lineare dei termini $I$, $A$, $A^2$, ..., $A^{n-1}$, e dunque $z^T A^k B$ è combinazione lineare dei termini $z^T B$, $z^T AB$, $z^T A^2 B$, ..., $z^T A^{n-1} B$.

La condizione di ortogonalità risulta pertanto:

$$z^T [B|AB|A^2B|\ldots|A^{n-1}B] = 0 \Rightarrow z^T R = 0\ .$$

Dalla definizione di *spazio immagine*[4] di una matrice, si ha dunque:

$$X_r^\perp(\tau) = \{z | z \in Ra[R]^\perp\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X_r^\perp(\tau) = Ra[R]^\perp \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X_r(\tau) = Ra[R]\ .$$

Dal momento che la matrice di raggiungibilità $R$ non è funzione di $\tau$, se ne deduce che anche l'insieme degli stati raggiungibili $X_r$ non è funzione di $\tau$.

[2] A tale riguardo si veda l'Appendice A.
[3] A tale riguardo si veda l'Appendice A.
[4] A tale riguardo si veda l'Appendice A.

*c.v.d.*

Una volta caratterizzato il sottospazio di raggiungibilità, possiamo chiederci se, dato un sistema, ogni suo stato è raggiungibile.

**Definizione: Sistema raggiungibile.** Un sistema $\Sigma(A, B)$ si dice *raggiungibile* se qualsiasi stato $\bar{x}$ appartenente all'insieme di stato $X$ di tale sistema è raggiungibile.

Siccome $X_r(\tau) = Ra[R]$, questo equivale a dire che

$$Ra[R] = \Re^n \tag{2.3}$$

e per tanto abbiamo il seguente risultato fondamentale.

**Teorema.** Il sistema $\Sigma(A, B)$ è raggiungibile se e solo se il rango della matrice $R$ è pari ad $n$.

### 2.1.2 Controllabilità

Nel caso della controllabilità l'analisi è pressoché la stessa, infatti abbiamo il seguente risultato.

**Teorema.** Il sottospazio di controllabilità $X_c(\tau)$ è indipendente da $\tau > 0$. Si ha che

$$X_c(\tau) = X_r(\tau) = Ra[R]$$

. La dimostrazione si basa sul fatto che l'insieme degli stati controllabili nell'intervallo $[0, \tau]$ è

$$X_c(\tau) = \{x : \; e^{A\tau}x + \int_0^\tau e^{A(\tau-\sigma)}Bu(\sigma)d\sigma = 0\}$$

La matrice $e^{A\tau}$ è invertibile e risulta $[e^{A\tau}]^{-1} = e^{-A\tau}$, otteniamo dunque che tali vettori $x$ sono caratterizzati da

$$x = -e^{-A\tau}\int_0^\tau e^{A(\tau-\sigma)}Bu(\sigma)d\sigma = -\int_0^\tau e^{-A\sigma}Bu(\sigma)d\sigma.$$

La dimostrazione del fatto $X_c(\tau) = Ra[R]$ è pressoché identica alla precedente. Analogamente a prima abbiamo la seguente.

**Definizione: Sistema controllabile.** Un sistema $\Sigma(A, B)$ si dice *controllabile* se qualsiasi stato $\bar{x}$ appartenente all'insieme di stato $X$ di tale sistema è controllabile. Siccome $X_c(\tau) = Ra[R]$, questo equivale a dire che la condizione di completa controllabilità è (2.3) e per tanto abbiamo il seguente risultato..

**Teorema.** Il sistema $\Sigma(A, B)$ è controllabile se e solo se il rango della matrice $R$ è pari ad $n$.

## 2.2 Decomposizione di Kalman Raggiungibilità

Nel caso in cui un sistema non sia raggiungibile, è sempre possibile scomporlo in due sottosistemi, dei quali uno è raggiungibile. Siano $X_r$ il sottospazio raggiungibile di dimensione $n_r < n$ e $X_{nr}$ il sottospazio non raggiungibile di dimensione $n_{nr} = n - n_r$. Si consideri una base $T_r = [t_1, \ldots, t_{n_r}]$ di $X_r$ e la si completi con una base arbitraria $T_{nr} = [t_{n_r+1}, \ldots, t_n]$ di $X_{nr}$.
È lecito, dunque, decomporre qualsiasi vettore $x$ di $\Re^n$ in una combinazione lineare delle due basi $T_r$ e $T_{nr}$:

$$x = T_r \hat{x}_r + T_{nr} \hat{x}_{nr} \; ,$$

dove $\hat{x}_r$ appartiene a $\Re^{n_r}$ e $\hat{x}_{nr}$ appartiene a $\Re^{n_{nr}}$. A questo punto è opportuno effettuare un cambio di stato affinchè i due vettori $\hat{x}_r$ e $\hat{x}_{nr}$ diventino componenti di un nuovo vettore di stato:

$$x = [T_r | T_{nr}] \begin{bmatrix} \hat{x}_r \\ \hat{x}_{nr} \end{bmatrix}$$

e dunque

$$\hat{x} = [T_r | T_{nr}]^{-1} x$$

dove abbiamo posto

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_r \\ \hat{x}_{nr} \end{bmatrix} .$$

Le due componenti di questo vettore $\hat{x}_r$ e $\hat{x}_{nr}$ rappresentano la parte raggungibile e non raggiungibile nel nuovo sistema di riferimento. Dunque, in tale nuova rappresentazione di stato, un vettore $\hat{x}$ è raggiungibile se e solo se $n_{nr} = 0$. L'espressione di stato del sistema $\Sigma(A, B)$ così trasformato, risulta dunque:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_r \\ \dot{\hat{x}}_{nr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_r & A_{r,nr} \\ 0_1 & A_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_r \\ \hat{x}_{nr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_r \\ 0_2 \end{bmatrix} u \; .$$

Vogliamo ora mostrare che, quando $\hat{x}$ è raggiungibile, i due blocchi indicati simbolicamente con $0_1$ e $0_2$ sono entrambi nulli. Per l'ipotesi di raggiungibilità, se assumiamo condizioni iniziali nulle

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_r \\ \hat{x}_{nr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

la evoluzione dello stato ad un generico tempo può passare solo per vettori del tipo

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_r \\ 0 \end{bmatrix}.$$

In particolare

$$\hat{x}_{nr}(t) \equiv 0.$$

Si consideri l'espressione di $\dot{\hat{x}}_{nr}$ in un generico istante $t$:

$$\dot{\hat{x}}_{nr}(t) = 0_1\hat{x}_r + A_{nr}\hat{x}_{nr} + 0_2 u.$$

a partire da condizioni iniziali nulle diventa in un generico istante $\tau > 0$

$$0 = 0_1 x_r(\tau) + 0_2 u(\tau) = \left[\begin{array}{cc} 0_1 & 0_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \hat{x}_r(\tau) \\ u(\tau) \end{array}\right].$$

Ora notiamo che, all'istante $\tau$, $\hat{x}_r(\tau)$ può essere scelto arbitrariamente perché componente raggiungibile, e $u(\tau)$ è arbitrario essendo l'ingresso. Quindi il vettore a destra della formula precedente può considerarsi arbitrario. Dunque siccome il risultato è comunque nullo abbiamo che

$$\left[\begin{array}{cc} 0_1 & 0_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array}\right].$$

Pertanto è sempre possibile decomporre un dato sistema nella forma

$$\begin{array}{rcl} \left[\begin{array}{c} \dot{\hat{x}}_r \\ \dot{\hat{x}}_{nr} \end{array}\right] & = & \left[\begin{array}{cc} A_r & A_{r,nr} \\ 0 & A_{nr} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \hat{x}_r \\ \hat{x}_{nr} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c} B_r \\ 0 \end{array}\right] u \\ y(t) & = & \left[\begin{array}{cc} C_r & C_{nr} \end{array}\right] \end{array} \tag{2.4}$$

Si noti che i blocchi $C_r$ e $C_{nr}$ in cui è partizionata $C$ non hanno alcuna particolarità, tranne quella di avere un numero di colonne pari alle componenti di $\hat{x}_r$ e $\hat{x}_{nr}$. Questa forma è di fondamentale importanza perché ci dice che il sistema presenta una parte raggiungibile data dal sottosistema

$$\Sigma(A_r, B_r, C_r),$$

una parte non raggiungibile data dal sottosistema non-raggiungibile

$$\Sigma(A_{nr}, 0, C_{nr})$$

e un blocco $A_{nr,r}$ che rappresenta l'azione del sistema raggiungibile su quello non raggiungibile. La situazione è rappresentata nella figura 2.1 sotto riportata.

Informazioni di fondamentale importanza che derivano dalla struttura sono le seguenti.

- il sistema non raggiungibile non risente (né direttamente né indirettamente attraverso il sottosistema raggiungibile) dell'ingresso ed evolve in risposta libera secondo la legge

$$\dot{\hat{x}}_{nr} = A_{nr}\hat{x}_{nr}.$$

- Il rapporto ingresso-uscita del sistema non risente della parte non raggiungibile. Infatti la matrice delle funzioni di trasferimento è

$$W(s) = C(SI - A)^{-1}B = C_r(SI - A_r)^{-1}B_r.$$

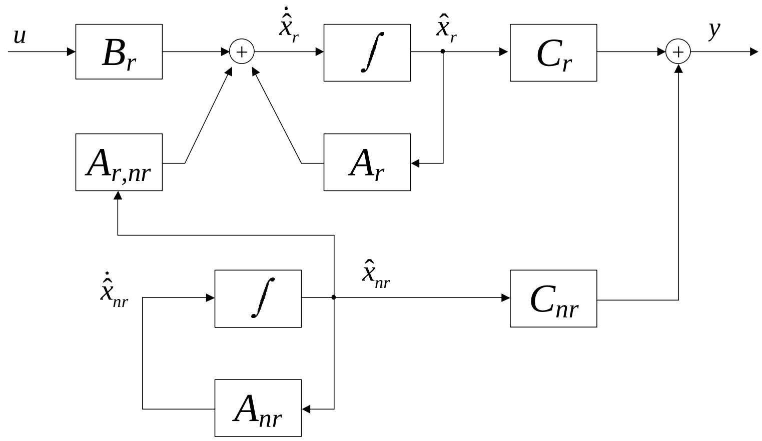


Figura 2.1:

- Dalla struttura della matrice di stato del sistema possiamo dedurre che gli autovalori del sistema possono essere partizionati in due sottoinsiemi, quelli della parte raggiungibile e quelli della parte non raggiungibile
$$\sigma(A) = \sigma(A_r) \bigcup \sigma(A_{nr}),$$
quindi esistono dei *modi raggiungibili* e dei *modi non raggiungibili*.

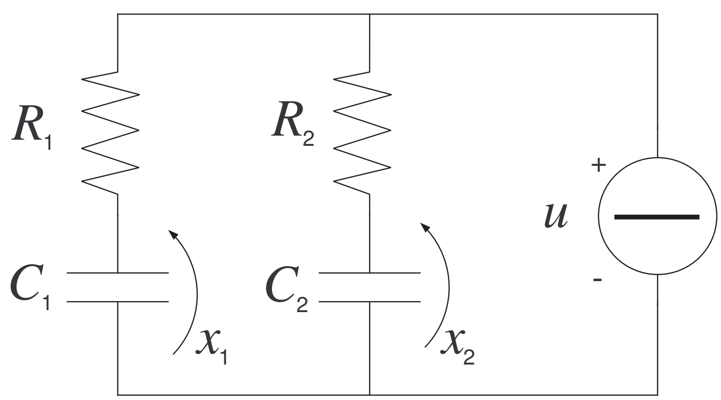


Figura 2.2:

**Esempio** Consideriamo il circuito rappresentato in Fig.2.2 e assumiamo come ingresso la tensione $u(t)$ e come variabili di stato le tensioni ai capi dei condensatori. La corrente che attraversa $R_1$ è $i_1(t) = \frac{u(t)-x_1(t)}{R_1}$. La tensione ai capi di $C_1$ è $x_1(t) = \frac{q_1(t)}{C_1}$, che derivata fornisce $\dot{x}_1 = \frac{\dot{q}_1(t)}{C_1} = \frac{i_1(t)}{C_1}$.

Sostituendo si ottiene

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{1}{R_1C_1}x_1(t) + \frac{1}{R_1C_1}u(t)$$

e, allo stesso modo, per l'altro ramo

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{1}{R_2C_2}x_2(t) + \frac{1}{R_2C_2}u(t).$$

La rappresentazione di stato del sistema è pertanto la seguente:

$$\dot{x}(t) \quad = \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1C_1} \\ \frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} u(t). \tag{2.5}$$

La matrice di raggiungibilità è allora

$$R = [B \ AB] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1C_1} & -\frac{1}{R_1^2C_1^2} \\ \frac{1}{R_2C_2} & -\frac{1}{R_2^2C_2^2} \end{bmatrix}.$$

È facile verificare che per $R_1C_1 \neq R_2C_2$ tale matrice ha rango massimo e dunque il sistema è completamente raggiungibile. Se invece $R_1C_1 = R_2C_2$, il rango della matrice è 1 e pertanto il sistema non è completamente raggiungibile. In questo caso il sottospazio raggiungibile, cioè l'immagine di $R$, ha dimensione 1 ed è formato da tutti e soli i vettori del tipo

$$x = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \Re.$$

Il vettore $t_1 = [\ 1\ 1\ ]^T$ costituisce evidentemente una base del sottospazio raggiungibile. Per ricondursi alla forma di Kalman è sufficiente completare la base con un vettore $t_2$ opportuno, ad esempio $t_2 = [\ -1\ 1\ ]^T$, e rappresentare il sistema rispetto alla base $T = [\ t_1,\ t_2\ ]$ così ottenuta (si invita a farlo per esercizio).

## 2.3 Raggiungibilità nei sistemi lineari e invarianti a tempo discreto

Consideriamo ora il problema della raggiungibilità per sistemi del tipo

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k). \tag{2.6}$$

Tutte le definizioni date in precedenza continuano a valere senza modifiche. Il problema della raggiungibilità può essere impostato come segue. Posto $x(0) = 0$, all'istante $k$ abbiamo che

$$x(k) = \sum_{h=0}^{k-1} A^{k-h-1}Bu(k) = R(k)U(k)$$

dove abbiamo posto

$$R(k) = \left[ \begin{array}{ccccc} B & AB & A^2B & \dots & A^{k-1}B \end{array} \right], \; U(k) = \left[ \begin{array}{c} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ u(1) \\ u(0) \end{array} \right].$$

Quindi il sottospazio di raggiungibilità in $k$ passi è

$$X_r(k) = Ra[R(k)].$$

Siccome $R(k+1)$ si ottiene aggiungendo a $R(k)$ delle nuove colonne (quelle $A^kB$) si ha che

$$X_r(1) \subseteq X_r(2) \subseteq X_r(3) \subset \dots \subseteq X_r(k).$$

In realtà è possibile smettere di aggiungere le colonne dalla $n$–esima in poi. Infatti, per l'identità di Cayley-Hamilton, le colonne di $A^kB$ per $k \geq n$ dipendono linearmente dalle precedenti. Quindi il più grande sottospazio raggiungibile è

$$X_r = X_r(n) = Ra[R(n)] = Ra[R],$$

dove $R$ è la medesima matrice considerata nel caso continuo.

Il caso discreto differisce nel fatto che il sottospazio di raggiungibilità può ingrandirsi al crescere dell'orizzonte $k$ ma rimane invariato da $k = n$ in poi. Vale dunque il seguente.

**Teorema.** Il sottospazio raggiungibile per sistemi a tempo discreto è

$$X_r = Ra[R].$$

Ogni stato raggiungibile è raggiungibile in al più $n$ passi. Il sistema discreto è raggiungibile se e solo se il rango della matrice $R$ è pari ad $n$. $QED$

Per quanto riguarda il problema della controllabilità possiamo dire che il sottospazio di controllabilità in $k$ passi è l'insieme di vettori $x$ "iniziali" tali che tramite una opportuna sequenza di ingressi possono essere portati a 0, ossia

$$A^kx + \sum_{h=0}^{k-1} A^{k-h-1}Bu(k) = x(k) = 0$$

Nel caso di $A$ invertibile possiamo premoltiplicare per $A^{-k}$ e ottenere

$$x = -\sum_{h=0}^{k-1} A^{-h-1}Bu(k).$$

Ovvero il sottospazio di controllabilità in $k$ passi è

$$X_c(k) = Ra[A^{-1}B|A^{-2}B| \dots A^{-k}B]$$

Ci poniamo ora la questione quando il sistema è completamente raggiungibile. Vale il seguente risultato (riportato senza dimostrazione).

**Teorema** Se la matrice $A$ è invertibile, allora

$$X_r = X_c = Ra[R].$$

In particolare, il sistema a tempo discreto è controllabile se e solo se è raggiungibile. In questo caso si ha $X_r = X_c = Ra[R]$ se e solo il rango della matrice $R$ è pari ad $n$.

Il lettore interessato può dimostrare il teorema per esercizio usando l'identità di Cailey–Hamilton.

Illustriamo, con un semplice esempio, quello che succede se $A$ è non–invertibile. Consideriamo il sistema

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

abbiamo che

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dunque il sottospazio raggiungibile è l'asse $x_1$. Però, con l'ingresso $u(k) = 0$ $\forall k$, abbiamo che per qualunque condizione iniziale

$$x(k) = A^k x(0) = 0, \quad \text{per } k \geq 2$$

Quindi il sottospazio controllabile è $\Re^2$.

Quello che si può dire in generale è che

$$X_r \subseteq X_c.$$

La dimostrazione è lasciata al lettore per esercizio.

# Capitolo 3

# Osservabilità e ricostruibilità

Il problema dell'osservabilità riguarda il rapporto tra stato e uscita. In breve il problema è il seguente. Noto l'ingresso $u(\cdot)$ e nota l'uscita $y(\cdot)$ ci si chiede se è possibile determinare lo stato. Consideriamo per generalità un sistema del tipo

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

con trasformazione di uscita

$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

**Definizione: Sistema osservabile nell'intervallo** Il sistema si dice *osservabile* nell'intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ se dalla conoscenza di $y(t)$ e di $u(t)$ in tale intervallo si può risalire allo stato iniziale $x(t_1)$.

**Definizione: Sistema ricostruibile nell'intervallo** Il sistema si dice *ricostruibile* nell'intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ se dalla conoscenza di $y(t)$ e di $u(t)$ in tale intervallo si può risalire allo stato finale $x(t_2)$.

## 3.1 Osservabilità e Ricostruibilità nei sistemi lineari invarianti a tempo continuo

Il problema della osservabilità e della ricostruibilità può essere trattato molto efficacemente per sistemi sistemi lineari invarianti a tempo continuo. Come vedremo le condizioni che ne derivano sono di tipo algebrico e adatte per essere trattate numericamente.

### 3.1.1 Osservabilità

Si consideri il seguente sistema:

$$\Sigma(A, B, C) = \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \tag{3.1}$$

e si assuma di avere un intervallo di osservazione $[0, \tau]$.

**Definizione: Sistema osservabile** Il sistema $\Sigma(A, B, C)$ si dice *osservabile* nell'intervallo di tempo $[0, \tau]$ se dalla conoscenza di $y(t)$ e di $u(t)$ si può risalire in modo univoco allo stato iniziale $x(0)$.

Poniamoci inizialmente il problema della determinazione dello stato iniziale $x(0)$. Dall'espressione di uscita di un sistema dinamico lineare a tempo continuo (eq. 3.25) si ricava che:

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \underbrace{\int_0^t Ce^{A(t-\sigma)}Bu(\sigma)d\sigma}_{funzione\ nota\ g(t)} \tag{3.2}$$

Il termine $g(t)$ è un termine noto che non gioca un ruolo essenziale, potremmo infatti porre il problema come

$$Ce^{At}x(0) = y(t) - g(t) = \tilde{y}(t)$$

dove $\tilde{y}(t)$ è il termine noto mentre $x(0)$ è da determinarsi. Il problema che si pone è un problema di unicità (in quanto l'esistenza di una soluzione $x(0)$ è garantita dalla formulazione del problema). Data una uscita e un ingresso si potrebbero avere più stati iniziali compatibili:

$$\begin{array}{rcl} y(t) & = & Ce^{At}x_1(0) + g(t) \\ y(t) & = & Ce^{At}x_2(0) + g(t) \end{array} \tag{3.3}$$

Sottraendo le due equazioni si ottiene

$$Ce^{At}\underbrace{[x_2(0) - x_1(0)]}_{\tilde{x}} = 0 \tag{3.4}$$

Ne deduciamo il seguente fatto: il problema non è risolvibile se esistono dei vettori $\bar{x} \neq 0$ tali che la (3.4) risulta soddisfatta, cioè vettori che generano una risposta libera dell'uscita identicamente nulla (indistinguibile da zero). Quindi deduciamo che se tali vettori esistono, il problema della osservabilità non ha soluzione, qualunque sia lo stato iniziale $x(0)$. Infatti, se $x(0)$ produce l'uscita $y(t)$ con l'ingresso $u(t)$, lo stato iniziale $x(0)+\tilde{x}$, produce la medesima uscita. Allora abbiamo che vale la seguente

**Proprietà:** Il sistema è osservabile nell'intervallo di tempo $[0, \tau]$ se e solo se non esistono stati indistinguibili da zero.

Per quanto visto non ha senso parlare di osservabilità di uno stato $x(0)$, visto che se il problema ha soluzione ogni stato iniziale è univocamente determinabile. Ha senso parlare di stati non osservabili, ovvero di stati non distinguibili da 0.

**Definizione: Stato non osservabile** Il vettore $\bar{x} \in \Re^n$ è detto non–osservabile (o indistinguibile da 0) nell'intervallo $[0, \tau]$ se

$$Ce^{At}\bar{x} \equiv 0.$$

Definiamo inoltre

**Definizione: Insieme degli stati non osservabili** L'insieme $X_{no}(\tau)$ degli stati non osservabili cioè indistinguibili da zero è un sottospazio (come banalmente verificabile) ed è detto sottospazio di non osservabilità.

**Definizione: Matrice di osservabilità**
Dato un sistema $\Sigma(A, B, C)$, si dice *matrice di osservabilità* la matrice

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}.$$

La matrice $O$ ha dimensioni $np \times n$ (è dunque una matrice "alta).

**Teorema** Il sottospazio non osservabile è indipendente da $\tau > 0$ e risulta essere

$$X_{no}(\tau) = ker[O] = \{x \in X | Ox = 0\}.$$

*Dimostrazione*
L'insieme di non osservabilità $X_{no}(\tau)$ è tale che:

$$y(t) = Ce^{At}x = C(I + At^2 + A^2\frac{t^2}{2!} + \ldots)x = \sum_{k=0}^{\infty} C\frac{A^k}{k!}xt^k = 0 \quad \forall t \in [0, \tau] \tag{3.5}$$

Per il principio di identità delle serie di potenze, questo è vero se e solo se

$$CA^kx = 0 \quad \forall k \geq 0$$

Sfruttando l'identità di Cailey-Hamilton,possiamo dire che questo equivale a

$$CA^kx = 0, \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

In forma compatta abbiamo che

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x = 0 \tag{3.6}$$

cioè

$$Ox = 0, \tag{3.7}$$

$$c.v.d.$$

Siccome l'osservabilità equivale alla non esistenza di stati indistinguibili da zero abbiamo che

**Teorema**
Un sistema è osservabile se e solo se $Ker[O] = \{0\}$, ossia se e solo se

$$rank[O] = n,$$

cioè se la matrice di osservabilità ha rango pieno.

### 3.1.2 Ricostruibilità

Diamo la seguente definizione.

**Definizione: Sistema ricostruibile** Il sistema $\Sigma(A, B, C)$ si dice *ricostruibile* nell'intervallo di tempo $[0, \tau]$ se dalla conoscenza di $y(t)$ e di $u(t)$ si può risalire in modo univoco allo stato finale $x(\tau)$.

Il problema della ricostruibilità, nel caso di sistemi lineari invarianti a tempo continuo è analogo al problema della osservabilita'. Infatti $x(\tau)$ e $x(0)$ sono legati dalla relazione

$$x(\tau) = e^{A\tau}x(0) + \int_0^t e^{A(\tau-\sigma)}Bu(\sigma)d\sigma$$

Quindi se è noto univocamente $x(0)$ anche $x(\tau)$ è noto univocamente. Siccome $e^{At}$ è invertibile e $[e^{At}]^{-1} = e^{-At}$ possiamo anche scrivere

$$x(0) = e^{-A\tau}x(\tau) - e^{-A\tau}\int_0^t e^{A(\tau-\sigma)}Bu(\sigma)d\sigma = e^{-A\tau}x(\tau) - \int_0^t e^{-A\sigma}Bu(\sigma)d\sigma$$

dunque se $x(\tau)$ è noto, $x(0)$ è fissato. Dunque le condizioni di ricostruibilità sono esattamente le stesse. Concludiamo dunque che

**Proprietà** Il sistema è ricostruibile nell'intervallo di tempo $[0, \tau]$ se e solo se non esistono stati indistinguibili da zero.

**Teorema** Un sistema è ricostruibile se e solo se $Ker[O] = \{0\}$, ossia se e solo se

$$rank[O] = n,$$

cioè la matrice di osservabilità ha rango pieno.

## 3.2 Forma di Kalman di Osservabilità

Nel caso in cui un sistema non sia osservabile è sempre possibile scomporlo in due sottosistemi, dei quali uno è osservabile. Siano $X_{no}$ il sottospazio non osservabile di dimensione $n_{no} < n$ e $X_o$ un qualunque sottospazio complementare, ovvero tale che

$$X_{no} \bigoplus X_o = \Re^n,$$

che viene detto *sottospazio osservabile* di dimensione $n_o = n - n_{no}$. Si consideri una base $T_{no} = [t_1, \ldots, t_{n_{no}}]$ di $X_{no}$ e la si completi con una base arbitraria $T_o = [t_{n_{no}+1}, \ldots, t_n]$ di $X_o$. È lecito, dunque, decomporre qualsiasi vettore $x$ di $\Re^n$ in una combinazione lineare delle due basi $T_{no}$ e $T_o$:

$$x = T_{no}\hat{x}_{no} + T_o\hat{x}_o\ ,$$

dove $\hat{x}_{no}$ appartiene a $\Re^{n_{no}}$ e $\hat{x}_o$ appartiene a $\Re^{n_o}$.
A questo punto è opportuno effettuare un cambio di stato affinché i due

vettori $\hat{x}_{no}$ e $\hat{x}_o$ risultino le nuove variabili di stato:

$$x = [T_{no}|T_o] \begin{bmatrix} \hat{x}_{no} \\ \hat{x}_o \end{bmatrix}$$

ovvero

$$\hat{x} = [T_{no}|T_o]^{-1} x$$

dove

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{no} \\ \hat{x}_o \end{bmatrix}.$$

I due sottovettori $\hat{x}_{no}$ $\hat{x}_o$ rappresentano le componenti non–osservabili e osservabili. L'espressione di stato del sistema $\Sigma(A, B, C)$ così trasformato, risulta dunque:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_{no} \\ \dot{\hat{x}}_o \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{no} & A_{no,o} \\ 0_2 & A_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{no} \\ \hat{x}_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{no} \\ B_o \end{bmatrix} u \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0_1 & C_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{no} \\ x_o \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vogliamo ora mostrare che $0_1$ e $0_2$ sono entrambi nulli. A tale proposito si assuma $u(t) \equiv 0$ e si consideri l'espressione dell'uscita

$$y(t) = 0_1 \hat{x}_{no} + C_o \hat{x}_o.$$

Siccome $\hat{x}_{no}$ è la componente non osservabile, deve succedere che per ogni stato iniziale del tipo

$$\begin{bmatrix} x_{no}(0) \\ 0 \end{bmatrix}$$

la risposta è identicamente nulla. In particolare in $t = 0$

$$y(0) = 0_1 \hat{x}_{no}(0) + C_o 0 = 0_1 \hat{x}_{no}(0) = 0$$

che ci dice che

$$0_1 = 0.$$

Inoltre ogni stato del tipo

$$\begin{bmatrix} x_{no}(\tau) \\ x_o(\tau) \end{bmatrix}$$

produce un'uscita non nulla se $x_o(\tau) \neq 0$, almeno in uno degli istanti successivi a $\tau$. che può essere visto come un nuovo "istante iniziale. Se per assurdo fosse $0_2 \neq 0$, per qualche vettore iniziale avente $x_o(0) = 0$ (e che pertanto dovrebbe produrre una uscita nulla) avremmo

$$\dot{x}_o(0) = 0_2 x_{no}(0) \neq 0$$

Quindi per un certo valore $\tau > 0$ avremmo $x_{no}(\tau) \neq 0$ in contraddizione col fatto che l'uscita è identicamente nulla.

Questo vuol dire che il sistema può essere scritto nella forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_{no} \\ \dot{\hat{x}}_{o} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{no} & A_{no,o} \\ 0 & A_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{no} \\ \hat{x}_{o} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{no} \\ B_o \end{bmatrix} u \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & C_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{no} \\ \hat{x}_{o} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Si noti che i blocchi $B_{no}$ e $B_o$ in cui è partizionata $B$ non hanno alcuna particolarità, tranne quella di avere un numero di righe pari alle componenti di $\hat{x}_{no}$ e $\hat{x}_o$. Questa forma è di fondamentale importanza perché ci dice che il sistema presenta una parte osservabile data dal sottosistema

$$\Sigma(A_o, B_o, C_o),$$

una parte non osservabile

$$\Sigma(A_{no}, B_{no}, 0)$$

e un blocco $A_{no,o}$ che rappresenta l'azione del sistema osservabile su quello non osservabile. La situazione è rappresentata nella figura sotto riportata.

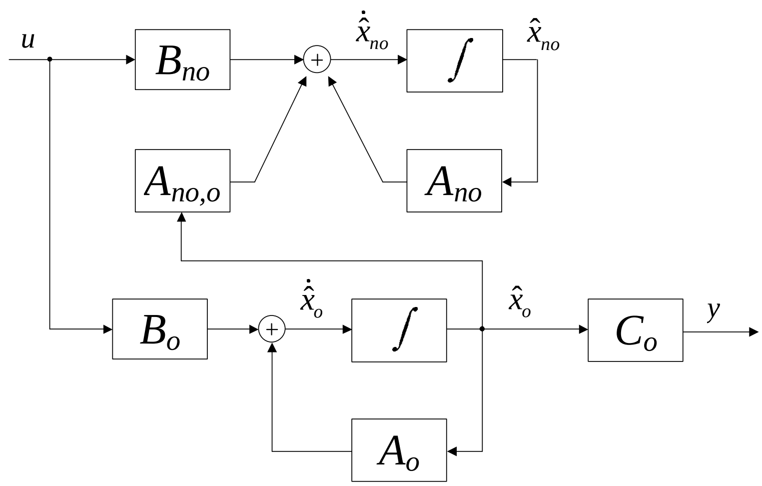


Figura 3.1:

Informazioni di fondamentale importanza che derivano dalla struttura sono le seguenti.

- l'uscita non risente (né direttamenete né indirettamente , attraverso il sottosistema osservabile) del sistema non osservabile.

- Il rapporto ingresso-uscita del sistema non risente della parte non osservabile. Infatti la matrice delle funzioni di trasferimento è

$$W(s) = C(SI - A)^{-1}B = C_o(SI - A_o)^{-1}B_o$$

- Dalla struttura della matrice di stato del sistema possiamo dedurre che gli autovalori del sistema possono essere partizionati in due sottoinsiemi, quelli della parte osservabile e quelli della parte non-osservabile

$$\sigma(A) = \sigma(A_o) \bigcup \sigma(A_o)$$

quindi esistono dei *modi osservabili* e dei *modi non osservabili.*

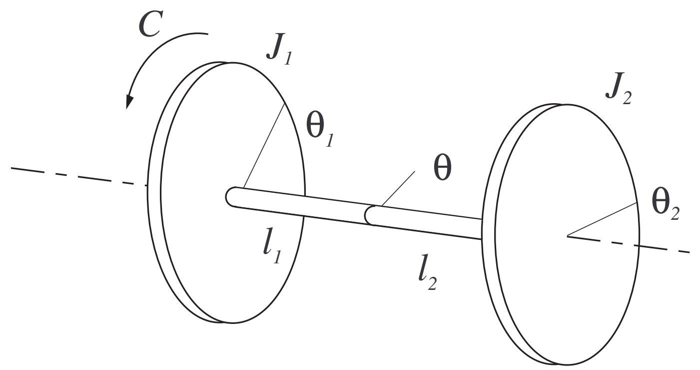


Figura 3.2:

**Esempio.** Consideriamo i due volani di Fig.3.2, i cui momenti di inerzia sono $J_1$ e $J_2$, connessi da un giunto elastico di costante $k$ e lunghezza $l$. Sul primo dei due volani è applicata una coppia $C(t)$. Siano $\vartheta_1$ e $\vartheta_2$ gli angoli dei volani rispetto ad uno stesso riferimento fisso e $\vartheta$ l'angolo di una sezione intermedia del giunto, posta ad una distanza $l_1$ dal primo volano. Il sistema è retto dalle equazioni seguenti

$$\begin{cases} J_1\ddot{\vartheta}_1(t) & = & -k(\vartheta_1(t) - \vartheta_2(t)) + C \\ J_2\ddot{\vartheta}_2(t) & = & -k(\vartheta_2(t) - \vartheta_1(t)) \end{cases}$$

mentre, supponendo lineare l'andamento della torsione lungo il giunto, si può scrivere

$$\vartheta(t) = \frac{l_1}{l}\vartheta_1(t) + \frac{l_2}{l}\vartheta_2(t).$$

Ponendo

$$\begin{array}{rcl} x_1(t) & = & \vartheta_1(t) \\ x_2(t) & = & \vartheta_2(t) \\ x_3(t) & = & \dot{\vartheta}_1(t) \\ x_4(t) & = & \dot{\vartheta}_2(t) \\ u(t) & = & C(t) \\ y(t) & = & \vartheta(t) \end{array}$$

si perviene alla rappresentazione di stato

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{J_1} & \frac{k}{J_1} & 0 & 0 \\ \frac{k}{J_2} & -\frac{k}{J_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{J_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= [\ \tfrac{l_1}{l} \ \ \tfrac{l_2}{l} \ \ 0 \ \ 0\ ] x(t).
\end{aligned}$$

Come è facile verificare, la matrice di osservabilità è allora

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l_1}{l} & \frac{l_2}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_1}{l} & \frac{l_2}{l} \\ \frac{k}{l}\left(\frac{l_2}{J_2} - \frac{l_1}{J_1}\right) & \frac{k}{l}\left(\frac{l_1}{J_1} - \frac{l_2}{J_2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k}{l}\left(\frac{l_2}{J_2} - \frac{l_1}{J_1}\right) & \frac{k}{l}\left(\frac{l_1}{J_1} - \frac{l_2}{J_2}\right) \end{bmatrix}.$$

Per la sua struttura e poiché $k, l, J_1, J_2$ ed almeno uno fra $l_1$ e $l_2$ sono diversi da zero, tale matrice ha rango pieno in tutti i casi tranne quelli in cui la prima colonna è multiplo della seconda (e di conseguenza anche la terza è multiplo della quarta). Ciò si verifica se e solo se

$$\frac{l_1}{J_1} = \frac{l_2}{J_2}.$$

Per questa particolare scelta di $l_1$ ed $l_2$ il sistema non è completamente osservabile. Il sottospazio non osservabile ha dimensione 2 (perché questo è il rango di $O$) ed è costituito da tutti e soli i vettori della forma

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \Re.$$

Ciò significa che l'uscita $\vartheta$ non contiene informazione alcuna sulle velocità angolari $\dot{\vartheta}_1$ e $\dot{\vartheta}_2$ dei giunti.

## 3.3 Sistemi a tempo discreto

Per i sistemi a tempo discreto valgono considerazioni analoghe alle precedenti. Come vedremo, tuttavia, non vi è equivalenza fra le condizioni di osservabilità (problema dello stato iniziale) e ricostruibilità (problema dello stato finale).

### 3.3.1 Osservabilità

Dato il sistema

$$\begin{array}{rcl} x(k+1) & = & Ax(k)+Bu(k) \\ y(k) & = & Cx(k) \end{array} \tag{3.9}$$

l'uscita al generico passo $k>0$ è data da

$$y(k)=CA^k x(0)+\sum_{h=0}^{k-1} CA^{k-h-1}Bu(h).$$

Ponendo $g(i)=\sum_{h=0}^{k-1} CA^{k-h-1}Bu(i),\ i=1,2,\ldots,n-1$ e poiché $y(0)=Cx(0)$ si possono scrivere le seguenti $n$ relazioni:

$$\begin{array}{rcl} y(0) & = & Cx(0) \\ y(1) & = & CAx(0)+g(1) \\ & \vdots & \\ y(n-1) & = & CA^{n-1}x(0)+g(n-1) \end{array}$$

ossia in forma compatta

$$Y-G=Ox(0), \tag{3.10}$$

avendo posto

$$Y=\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{bmatrix},\ G=\begin{bmatrix} 0 \\ g(1) \\ \vdots \\ g(n-1) \end{bmatrix},\ O=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Il sistema (3.10) ha soluzione unica per ogni $x(0)\in\Re^n$ se e solo se $O$ ha $n$ colonne linearmente indipendenti. Si ha pertanto il seguente

**Teorema** Il sistema 3.9 è osservabile se e solo se

$$rank(O)=n,$$

cioè se la matrice di osservabilità ha rango pieno.

Si noti che risalire a $x(0)$ richiede in generale l'osservazione di $n$ uscite. Come nel caso dei sistemi a tempo continuo, si può provare che l'insieme $X_{no}$ degli stati indistinguibili da zero è un sottospazio e corrisponde al nucleo della matrice di osservabilità $O$. Ancora, la forma di Kalman di osservabilità si ottiene esprimendo il sistema rispetto ad una base di $X_{no}$ arbitrariamente completata.

### 3.3.2 Ricostruibilità

Poiché

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{h=0}^{k-1} A^{k-h-1} B u(h), \tag{3.11}$$

è immediato riconoscere che anche per i sistemi a tempo discreto, come nel caso dei sistemi a tempo continuo, l'osservabilità implica la ricostruibilità. Infatti, noto $x(0)$, l'espressione precedente consente di risalire a $x(k)$. A differenza dei sistemi a tempo continuo però, non vale l'implicazione inversa: cioè un sistema a tempo discreto può essere ricostruibile ma non osservabile. Infatti, supponendo di conoscere uscita ingresso e stato finale $x(k)$, per risalire allo stato iniziale $x(0)$ bisogna risolvere la (3.11) rispetto a $x(0)$ cosa che è possibile solo se $A$ è invertibile. Quindi, per i sistemi a tempo discreto, dalla ricostruibilità discende l'osservabilità solo nel caso in cui la matrice $A$ è invertibile. Un semplice esempio di sistema ricostruibile ma non osservabile è il sistema $\Sigma : (A, B, C)$ con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; C = [\, 0 \;\; 0 \,].$$

Essendo l'uscita identicamente nulla, il sistema è chiaramente non osservabile: è impossibile risalire allo stato iniziale osservando l'uscita. Tuttavia il sistema è ricostruibile perché qualunque sia lo stato iniziale, è possibile risalire allo stato finale dopo due passi. Si verifica facilmente infatti che $x(k) = 0, \; \forall k \geq 2$.

# Capitolo 4

# Dualità e forma di Kalman

## 4.1 Dualità tra Osservabilità e Raggiungibilità

Come abbiamo visto gli studi di raggiungibilità e osservabilità forniscono delle condizioni algebriche molto potenti. Tali condizioni hanno delle profonde analogie che portano alla teoria della dualità che ora esploriamo. Dato un sistema dinamico

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) & = & Cx(t) + Du(t) \end{array} \qquad (PRIM)$$

detto primale, con $u(t) \in \Re^m$, $x(t) \in \Re^n$ e $y(t) \in \Re^p$ definiamo il sistema

$$\begin{array}{rcl} \dot{z}(t) & = & A^T z(t) + C^T v(t) \\ w(t) & = & B^T z(t) + D^T v(t) \end{array} \qquad (DUAL)$$

detto duale, ottenuto semplicemente trasponendo tutte le matrici e permutando $C$ e $B$. Il sistema duale ha lo stesso numero di variabili di stato $z(t) \in \Re^n$. Il duale ha un numero di uscite $m$ pari al numero di ingressi del primale e viceversa. Valgono le seguenti proprietà.

**Proprietà**

- Il duale di $\Sigma(A, B, C, D)$ è $\Sigma(A^*, B^*, C^*, D^*) = \Sigma(A^T, C^T, B^T, D^T)$.
- Il duale del duale è il sistema originale.
- La matrice di raggiungibilità del duale è

  $$R^* = O^T$$

  ovvero la trasposta della matrice di osservabilità del primale.
- La matrice di osservabilità del duale è

  $$O^* = R^T$$

  ovvero la trasposta della matrice di raggiungbilità del primale.

- Il sistema duale è raggiungibile se e solo se il primale è osservabile.
- Il sistema duale è osservabile se e solo se il primale è raggiungibile.
- La matrice delle funzioni di trasferimento del duale è

  $$W^*(s) = C^*(sI - A^*)^{-1}B^* + D^* = B^T(sI - A^T)^{-1}C^T + D^T = [W(s)]^T$$

  ovvero la trasposta della matrice delle funzioni di trasferimento del primale.

### 4.1.1 Criterio di Popov

I seguenti criteri di raggiungibilità e osservabilit'a, detti crietri di Popov, sono molto utili in diverse applicazioni.

**Theorema** Il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

- è raggiungibile se e solo se per qualsiasi $\lambda \in C$ (per qualsiasi $\lambda \in \sigma(A)$) vale che

  $$rank[\lambda I - A|B] = n$$

- è osservabile se e solo se per qualsiasi $\lambda \in C$ (per qualsiasi $\lambda \in \sigma(A)$) vale che

  $$rank \begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} = n$$

**Proof** Dimostriamo la prima proprietà, in quanto la seconda deriva immediatamente per dualità.

La raggiungibilià implica $rank[\lambda I - A|B] = n$ per ogni $\lambda$ complesso.

Supponiamo per assurdo che $rank[\lambda I - A|B] < n$ per qualche $\lambda$. Allora esiste un vettore $z \neq 0$ tale che $z^T[\lambda I - A|B] = 0$. Questo implica $z^T B = 0$ e $z^T[\lambda I - A] = 0$, ovvero $z^T\lambda = z^T A$. Consideriamo il vettore

$$z^T AB = \lambda z^T B = 0.$$

Per induzione assumiamo $z^T A^k B = 0$. allora

$$z^T A^{k+1}B = z^T AA^k B = \lambda z^T A^k B = 0$$

Questo vuole dire $z^T AA^k B = 0$ per qualsiasi $k > 0$. Ovvero, limitandoci a $k = 0, 1, \ldots, n-1$

$$[z^T B|z^T AB|z^T A^2B|\ldots z^T A^{n-1}B] = z^T[B|AB|A^2B|\ldots|A^{n-1}B] = z^T R = 0.$$

Allora il sistema non è raggiungibile e cadiamo in contraddizione.

La proprietà $rank[\lambda I - A|B] = n$, per ogni $\lambda$ complesso, implica la raggiungibilià.

Per assurdo supponiamo che il sistema non sia raggiungibile. Allora il sistema è decomponibile secondo Kalman (2.4)

$$[\lambda I - A_K|B_K] = \left[\begin{array}{cc|c} \lambda I - A_r & -A_{r,nr} & B_r \\ 0 & \lambda I - A_{nr} & 0 \end{array}\right].$$

Sia $r < n$ la dimensione del sottosistema raggiungibile. È facile vedere che le ultime righe (relative al sottosistema non-raggiungibile) sono linearmente dipendenti per ogni $\lambda$ scelto come autovalore di $A_{nr}$. Ora la dimostrazione è completa pensando che $A = TA_KT^{-1}$ e $B = TB_K$ quindi

$$[\lambda I - A|B] = T[\lambda I - A_K|B_K] \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

quindi $[\lambda I - A|B]$ e $[\lambda I - A_K|B_K]$ hanno il medesimo rango per ogni $\lambda$. *c.v.d.*

È importante notare che la matrice $[\lambda I - A|B]$ ha un calo di rango per ogni $\lambda \in \sigma(A_{nr})$ ovvero per ogni autovalore non raggiungibile.

## 4.2 Forma di Kalman di Raggiungibilità e Osservabilità

Dato un sistema $\Sigma(A, B, C)$ è sempre possibile giungere ad una forma detta di Kalman che tenga conto congiuntamente delle proprieà di raggiungibilità e oservabilità. Come abbiamo visto, i sottospazi di raggiungibilità e non osservabilità sono caratterizzati da

$$X_r = Ra[R] \tag{4.1}$$
$$X_{no} = Ker[O] \tag{4.2}$$

Definiamo i seguenti sottospazi.

- $X_1 \doteq X_r \bigcap X_{no}$.
- $X_2$ sia il completamento di $X_1$ in $X_r$ cioè tale che
$$X_1 \bigodot X_2 = X_r$$
- $X_3$ sia il completamento di $X_1$ in $X_{no}$ cioè tale che
$$X_1 \bigodot X_3 = X_{no}$$

- $X_4$ sia il completamento dei precedenti sottospazi $X_i$ in $X = \Re^n$ cioè tale che
$$X_1 \bigodot X_2 \bigodot X_3 \bigodot X_4 = X_{no}$$

Allora abbiamo, per costruzione, che

$$\begin{aligned} X_r &= X_1 \bigodot X_2 && (4.3)\\ X_{nr} &= X_3 \bigodot X_4 && (4.4)\\ X_{no} &= X_1 \bigodot X_3 && (4.5)\\ X_o &= X_2 \bigodot X_4 && (4.6)\\ & && (4.7) \end{aligned}$$

Siano $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$ basi dei sottospazi sopra introdotti. Siccome tali sottospazi completano $\Re^n$ la matrice

$$T = [T_1|T_2|T_3|T_4]$$

è quadrata e invertibile. Ogni vettore $x$ può essere scritto come

$$x(t) = T_1\hat{x}_1(t) + T_2\hat{x}_2(t) + T_3\hat{x}_3(t) + T_4\hat{x}_4(t)$$

dove $\hat{x}_i(t)$ sono vettori di dimensioni pari a quelle degli $X_i$. Se trasformiamo il sistema con la relazione $x(t) = T\hat{x}(t)$ otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} & A_{13} & A_{14}\\ 0 & A_2 & 0 & A_{24}\\ 0 & 0 & A_3 & A_{34}\\ 0 & 0 & 0 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1\\ B_2\\ 0\\ 0 \end{bmatrix} u(t)\\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La struttura considerata può essere rappresentata secondo lo schema di Fig.4.1a, dove i riquadri numerati indicano dei sottosistemi del tipo illustrato in Fig.4.1b.

La funzione di trasferimento del sistema risente esclusivamente della parte raggiungibile e osservabile del sistema ovvero abbiamo che

$$C(sI - A)^{-1}B = C_2(sI - A_2)^{-1}B_2$$

in quanto le parti non raggungibili o non osservabili non intervengono nel rapporto ingresso uscita del sistema. Analogamente la matrice delle risposte impulsive del sistema risulta essere

$$W(t) = Ce^{At}B = C_2e^{A_2t}B_2,$$

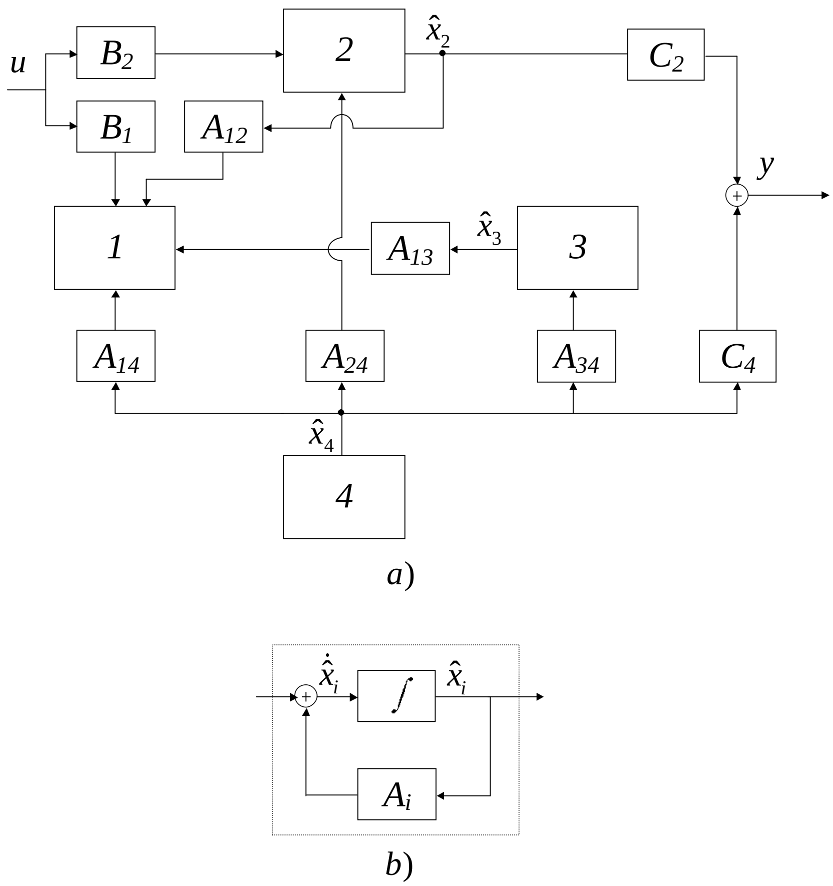


Figura 4.1:

pertanto la risposta forzata del sistema è

$$y(t) = \int_0^t \quad C_2 e^{A_2(t-\sigma)} B_2 \; u(\sigma) d\sigma \tag{4.8}$$

La forma di Kalman ci dice anche che gli autovalori del sistema possono essere suddivisi in quattro sottoinsiemi, in quanto, essendo la matrice associata al sistema triangolare a blocchi abbiamo che

$$\sigma(A) = \sigma(A_1) \bigcup \sigma(A_2) \bigcup \sigma(A_3) \bigcup \sigma(A_4)$$

e pertanto i modi possono essere suddivisi in modi ragg.–nonoss., ragg.–oss., nonragg.–nonoss. e nonragg.–oss., associati ai quattro sottosistemi.

### 4.2.1 Stabilità esterna

Un importante concetto è quello di stabilità esterna, detta anche stabilità Bounded Input—Bounded Output (BIBO).

**Definizione: Stabilità esterna**. Un sistema $\Sigma(A, B, C, D)$ si dice stabile esternamente se assunto $x(0) = 0$ e assunto che $\|u(t)\| \leq \mu$ abbiamo che esiste $\nu > 0$ tale che

$$\|y(t)\| \leq \nu,$$

per tutti i valori di $t > 0$.

Vale il seguente.

**Teorema** Un sistema è stabile esternamente se e solo se la parte raggiungibile e osservabile è asintoticamente stabile ovvero se

$$\sigma(A_2) \subset C_2(sI - A_2)^{-1}B_2$$

Abbiamo anche il seguente corollario.

**Corollario** Dato un sistema raggiungibile e osservabile, tale sistema è stabile esternamente se e solo è asintoticamente stabile.

L'importanza del corollario risiede nel fatto che a meno di patologie del sistema, come la mancanza di raggiungibilità e di osservabilità, la stabilità asintotica che è stata definita partendo da perturbazioni sulle condizioni iniziali, a parità di ingresso, è in realtà legata ad un concetto di stabilità definito tramite rapporto ingresso uscita.

Daremo solo un cenno della dimostrazione del teorema. Innanzitutto osserviamo che le parti non raggiungibili e osservabili non intervengono nella risposta forzata del sistema che è data da (4.8), quindi possiamo tenere in considerazione il solo sottosistema raggiungibile e osservabile. La dimostrazione del teorema si riduce dunque alla dimostrazione del corollario.

Supponiamo che il sistema $\Sigma(A, B, C)$ sia asintoticamente stabile e $\|u(\sigma)\| \leq \mu$. La risposta forzata è

$$y(t) = \int_0^t \; Ce^{A(t-\sigma)}B \; u(\sigma)d\sigma \tag{4.9}$$

allora consideriamo la norma

$$\begin{aligned}
\|y(t)\| &= \|\int_0^t \; Ce^{A(t-\sigma)}B \; u(\sigma)d\sigma\| \leq \int_0^t \; \|Ce^{A(t-\sigma)}B \; u(\sigma)\|d\sigma \\
&\leq \int_0^t \; \|Ce^{A(t-\sigma)}B\| \; \|u(\sigma)\|d\sigma \leq \int_0^t \; \|Ce^{A(t-\sigma)}B\|\mu d\sigma \leq \\
&\leq \mu \underbrace{\int_0^\infty \; \|Ce^{A(t-\sigma)}B\|d\sigma}_{\leq\rho} = \rho\mu = \nu
\end{aligned}$$

dove le ultime uguaglianze sono dovute al fatto che, come noto, la risposta impulsiva è una combinazione lineare di modi e quindi l'integrale converge monotonicamente al valore finito $\rho$.

Viceversa supponiamo che $\Sigma(A, B, C)$ non sia asintoticamente stabile. Allora ammette un modo a parte rale positiva o nulla. Nel primo caso la non limitatezza è semplice. Infatti, essendo il sistema instabile, esiste una condizione iniziale $x(0) = \bar{x}$ per cui $\|x(t)\| \to \infty$. La divergenza avviene anche per la condizione iniziale scalata $\epsilon\bar{x}$ se $\epsilon > 0$. Essendo il sistema raggiungibile, un vettore $\bar{x}$ può essere raggiunto in $[0, \tau]$ con un ingresso $u(t)$. Il raggiungimento di $\epsilon\bar{x}$ può essere ottenuto con l'ingresso $\epsilon u(t)$, e scegliendo $\epsilon > 0$ si può ottenere la condizione $\|u\| \leq \mu$. Mettendo l'ingresso a 0 da $\tau$ in poi abbiamo che $\|u(t)\| \leq \mu$ è ancora soddisfatta e $\|x(t)\| \to \infty$.

Se esiste un modo semplicemente stabile la dimostrazione è più complessa. Ne diamo un cenno. Consideriamo il modo $e^{j\omega t}$. Tale modo appare nalla matrice delle risposte impulsive e quindi esiste almeno una delle componenti di $W(t)$ che contiene tale modo. Tale modo può essere portato in "risonanza tramite l'ingresso

$$u(s) = \frac{\epsilon}{s - j\omega}$$

che pur essendo limitato porta il sistema a divergere.

## 4.3 Problema delle cancellazioni

La decomposizione di Kalman ci dice, fra le altre cose, che la funzione di trasferimento di un sistema dipende esclusivamente dalla parte raggiungibile e osservabile. Questo fatto è legato al problema delle cancellazioni. Data una matrice di funzioni razionali strettamente propria $W(s)$, possiamo sempre pensarla scritta nella forma

$$W(s) = \frac{N(s)}{d(s)} = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} n_{11}(s) & n_{12}(s) & \dots & n_{1m}(s) \\ n_{21}(s) & n_{22}(s) & \dots & n_{2m}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n_{p1}(s) & n_{p2}(s) & \dots & n_{pm}(s) \end{bmatrix}$$

dove $d(s)$ è il polinomio caratteristico

$$d(s) = \det(sI - A)$$

Diremo che il sistema ammette delle cancellazioni se esiste $\lambda$ complesso tale che

$$d(\lambda) = 0, \quad \text{e} \ \ n_{ij}(\lambda) = 0, \ \ \forall i, j.$$

Se un sistema manca di raggiungibilità o osservabilità, necessariamente la funzione di trasferimento ammette delle cancellazioni. Infatti

$$C(sI - A)^{-1}B = C_2(sI - A_2)^{-1}B_2 = \frac{N_2(s)}{d_2(s)}$$

dove

$$gr(d_2(s)) = gr(\det(sI - A_2)) < gr(\det(sI - A)) = n.$$

Pertanto ci sono state delle cancellazioni, e in particolare, ci sono state le cancellazioni di *tutti* i fattori associati agli autovalori delle parti non raggiungibili e non osservabili.

Sfortunatamente le cose si complicano perché la presenza di cancellazioni non implica mancanza di raggiungibilità o controllabilità. Per esempio il sistema

$$A = -I, \quad B = I, \quad C = I$$

è raggiungibile e osservabile però la sua matrice delle funzioni di trasferimanto è

$$W(s) = \frac{1}{(s+1)(s+1)} \begin{bmatrix} (s+1) & 0 \\ 0 & (s+1) \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dunque ammette cancellazioni. Sotto una ulteriore ipotesi, la ciclicità della matrice $A$, ovvero il fatto che ogni autovalore abbia al più un blocco di Jordan associato (ovvero sia di molteplicià geometrica uno) si può dimostrare che l'assenza di cancellazioni equivale alla completa raggiungibilità e osservabilità.

Il seguente risultato è valido per sistemi ad un ingresso e una uscita.

**Teorema** Il sistema $\Sigma(A, B, C, D)$ ad un ingresso e una uscita $m = p = 1$ è raggiungibile e osservabile se e solo se scritta la funzione di trasferimento come

$$w(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{\det \left[ \begin{array}{c|c} \text{[sI-A]} & \text{-B} \\ \hline \text{C} & \text{D} \end{array} \right]}{\det(sI - A)}$$

i polinomi $n(s)$ e $d(s)$ non hanno radici in comune.

**Proof** Se manca la raggiungibilità o l'osservabilità, come abbiamo visto, devono esserci cancellazioni quindi una delle due implicazioni è immediata. Supponiamo ora che esistano delle cancellazioni. Questo vuol dire che per qualche $\lambda \in C$ abbiamo che

$$\det(\lambda I - A) = 0, \qquad \det \left[ \begin{array}{c|c} [\lambda I - A] & -B \\ \hline C & D \end{array} \right] = 0$$

Essendo l'ultima matrice riportata singolare esiste un vettore non nullo $[\bar{x}^T | \bar{u}]^T \in \Re^{n+1}$ tale che

$$\left[ \begin{array}{c|c} [\lambda \text{ I-A}] & \text{-}B \\ \hline C & \text{-}D \end{array} \right] \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{u} \end{bmatrix} = 0$$

Consideriamo due casi.

Caso 1: $\bar{u} = 0$. In questo caso

$$\begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} \bar{x} = 0.$$

Questo vuol dire che le $n$ colonne della matrice $\begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix}$ sono linearmente dipendenti, dunque il rango è inferiore a $n$ e per il criterio di Popov manca l'osservabilità (precisamente $\lambda$ è autovalore non osservabile).

Caso 2: $\bar{u} \neq 0$. Sia allora $\tilde{x}$ un autovettore associato a $\lambda$, cioè tale che $[\lambda I - A]\tilde{x} = 0$. In questo caso abbiamo che

$$\begin{bmatrix} \lambda I - A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} & \tilde{x} \\ \bar{u} & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Questo vuol dire che la matrice $\begin{bmatrix} \lambda I - A & B \end{bmatrix}$ ammette un nucleo avente due vettori linearmente indipendenti. Tale matrice ha $n+1$ colonne quindi il suo rango è $\leq n-1$. Per il criterio di Popov, manca la raggiungibilità (precisamente $\lambda$ è autovalore non raggiungibile).

## 4.4 Forme canoniche

Come abbiamo già visto, in molte occasioni è molto utile trasformare il sistema di coordinate. Introduciamo ora delle forme canoniche che risulteranno molto utili nelle applicazioni.

Come prima cosa ricordiamo che dato un sistema $\Sigma(A, B, C, D)$ e la trasformazione di stato $x(t) = T\hat{x}(t)$ il sistema nelle nuove coordinate è

$$\Sigma(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, D) = \Sigma(T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D)$$

È dunque facile verificare che le matrici di osservabilità e raggiungibilità subiscono la seguente trasformazione

$$\hat{R} = T^{-1}R$$

e, rispettivamente,

$$\hat{O} = OT$$

(in poche parole $R$ si "trasforma come $B$ mentre $O$ si "trasforma come $C$). Questo risulta utile nella determinazione delle forme canoniche di raggiungibilità e osseravabilità.

### 4.4.1 Forma canonica di raggiungibilità

Consideriamo il sistema lineare ad un ingresso ($m = 1$) e una uscita ($p = 1$) $(A, B, C)$. Supponiamo che tale sistema sia raggiungibile. Allora esiste una trasformazione $T$ tale che

$$\hat{A} = T^{-1}AT, \quad \hat{B} = T^{-1}B, \quad C = CT$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -p_0 & -p_1 & -p_2 & \dots & -p_{n-2} & -p_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\hat{C} = CT = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & \dots & q_{n-2} & q_{n-1} \end{bmatrix}$$

L'eventuale $D$ (che è scalare) resta invariato. Siccome $\hat{R} = T^{-1}R$ la trasformazione di stato $T$ è data da

$$T = R\hat{R}^{-1}.$$

Vedremo in breve come possiamo utilizzare questa espressione, visto che $\hat{R}$ non è nota. Cominciamo a dare un elenco di applicazioni. Questa forma è fondamentale perché

- I coefficienti $p_i$ e $q_i$ sono i coefficienti di denominatore e numeratore della funzione di trasferimento; precisamente abbiamo che

  $$C(sI - A)^{-1}B = \frac{q(s)}{p(s)} = \frac{q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + \dots + q_{n-1}s^{n-1}}{p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots + p_{n-1}s^{n-1} + s^n}$$

  quindi questa forma permette di associare ad una funzione di trasferimento una rappresentazione di stato.

- Come caso particolare, se assumiamo $y(t) = x_1(t)$ il sistema è equivalente alla equazione differenziale di ordine $n$

  $$y^{(n)}(t) + p_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + p_1 y^{(1)}(t) + p_0 y^{(0)}(t) = u(t)$$

- Questa forma permette di realizzare un sistema in modo analogico tramite circuiti operazionali.

- Questa forma permette di assegnare gli autovalori tramite una retroazione dello stato.

Il suo calcolo è semplice perché richiede:

1. il calcolo dei coefficienti $p_i$ del polinomio caratteristico $p(s)$, che determina $\hat{A}$ ($B$ è nota a priori).

2. il calcolo dei coefficienti $q_i$ del numeratore $n(s)$ della funzione di trasferimento.

3. il calcolo di $\hat{R}$ che permette a sua volta il calcolo di $T = R\hat{R}^{-1}$.

### 4.4.2 Forma canonica di osservabilità

La forma cononica precedente ne ammette una duale. Consideriamo il sistema lineare ad un ingresso ($m = 1$) e una uscita ($p = 1$) $(A, B, C)$. Supponiamo che tale sistema sia osservabile. Allora esiste una trasformazione $T$ tale che

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -p_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -p_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & : & -p_2 \\ : & : & \dots & : & : & : \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -p_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -p_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ : \\ q_{n-2} \\ q_{n-1} \end{bmatrix}$$

e

$$\hat{C} = CT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'eventuale $D$ (che è scalare) resta invariato. Siccome $\hat{O} = OT$ la trasformazione di stato $T$ è data da

$$T = O\hat{O}^{-1}$$

# Capitolo 5

# Realizzazione di sistemi lineari

Il problema della realizzazione di sistemi dinamici consiste nell'associazione di una rappresentazione di stato ad una rappresentazione ingresso–uscita di un sistema. In questa sezione ne daremo i fondamenti e studieremo il problema della realizzazione minima.

## 5.1 Relizzazione di un sistema

**Realizzazione** Data una matrice di funzioni di trasferimento razionali strettamente propria $W(s) = [W_{ij}(s)$ dicesi realizzazione un quaterna di matrici $(A, B, C, D)$ tali che

$$W(s) = C(SI - A)^{-1}B + D$$

Assumiamo, senza restrizione che $W(s)$ sia scritta usando un denominatore comune

$$W(s) = \frac{N(s)}{d(s)}$$

dove $N(s) = [N_{ij}(s)]$ è una matrice di polinomi. Chiaramente perchè il problema abbia una soluzione, la matrice di funzioni razionali deve essere strettamente propria, ovvero per ogni $(i, j)$ deve succedere

$$gr(n_{ij}(s)) \leq gr(d(s))$$

In realta' si pou supporre che

$$gr(n_{ij}(s)) < gr(d(s))$$

Infatti ci si può ricondurre a questo caso calcolando la matrice $D$ come prima operazione.

Basta scrivere, per ogni componente per la quele $gr(n_{ij}(s)) = gr(d(s)) = \nu$

$$\frac{n_{ij}(s)}{d(s)} = \frac{\tilde{n}_{ij}(s)}{d(s)} + D_{ij}$$

dove $gr(\tilde{n}_{ij}(s)) \leq gr(d(s))$. Questo lo si può fare con la divisione

$$\begin{aligned}
\frac{n(s)}{d(s)} &= \frac{n_\nu s^\nu + n_{\nu-1}s^{\nu-1} + \ldots + n_1 s + n_0}{d_\nu s^\nu + d_{\nu-1}s^{\nu-1} + \ldots + d_1 s + d_0} = \\
&= \frac{n_\nu}{d_\nu} - \frac{\left(n_{\nu-1} - \frac{n_\nu}{d_\nu}d_{\nu-1}\right)s^{\nu-1} + \ldots + \left(n_1 - \frac{n_\nu}{d_\nu}d_1\right)s + \left(n_0 - \frac{n_\nu}{d_\nu}d_0\right)}{d_\nu s^\nu + d_{\nu-1}s^{\nu-1} + \ldots + d_1 S + d_0} = \\
&= \underbrace{\frac{n_\nu}{d_\nu}}_{=D} - \underbrace{\frac{\tilde{n}_{\nu-1}s^{\nu-1} + \ldots + \tilde{+}\tilde{n}_1 + n_0}{d_\nu s^\nu + d_{\nu-1}s^{\nu-1} + \ldots + \tilde{d}_1 + d_0}}_{\text{parte strettamente propria}}
\end{aligned}$$

Questa operazione può essere fatta componente per componente. Allora il problema, si riduce al seguente:

**Problema della realizzazione**: Data la matrice di funzioni razionali strettamente proprie $W(s) = \frac{N(s)}{d(s)}$, si determinino $(A, B, C)$ tali che

$$W(s) = C(SI - A)^{-1}B$$

Questo problema ha una semplice soluzione. Si scriva $N(s)/d(s)$ come

$$W(s) = \frac{N(s)}{d(s)} = \frac{N_{\nu-1}s^{\nu-1} + N_{\nu-2}s^{\nu-2} + \ldots + N_1 s + N_0}{s^\nu + d_{\nu-1}s^{\nu-1} + \ldots + d_1 s + d_0}$$

dove $N_i$ sono matrici costanti dei coefficienti di $N(s)$. Si noti che non è restrittivo prendere il coefficiente del termine di grado massimo del denominatore pari a 1 (se così non fosse basterebbe dividere numeratore e denominatore per tale termine). Allora la terna

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & I \\ -d_0 I & -d_1 I & -d_2 I & \ldots & -d_{n-2}I & -d_{n-1}I \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} N_0 & N_1 & N_2 & \ldots & N_{n-2} & N_{n-1} \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

dove le matrici $I$ che compaiono sono identiche $m \times m$ e $N_i$ sono di dimensioni $p \times m$, è soluzione del problema. Le dimensioni di $A$ sono $n = m\nu \times m\nu$ Infatti si consideri la matrice razionale

$$\Psi(s) = \begin{bmatrix} I \\ sI \\ s^2 I \\ \vdots \\ s^{\nu-1}I \end{bmatrix} \frac{1}{d(s)}$$

con un semplice conto si verifica che $\Psi(s)$ è tale che

$$(sI - A)\Psi(s) = B$$

ovvero

$$\Psi(s) = (sI - A)^{-1}B$$

allora $C(sI - A)^{-1}B = C\Psi(s)$ dunque

$$C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} N_0 & N_1 & \dots & N_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ sI \\ : \\ s^{\nu-1}I \end{bmatrix} \frac{1}{d(s)} = \frac{N(s)}{d(s)}$$

Naturalmente la realizzazione così ottenuta non è unica. Ne esistono infatti infinite. Il problema è se ne esistano di minima complessià e questo è l'argomento della prossima sezione.

## 5.2 Relizzazione minima

In questa sezione ci poniamo il problema di determinare una realizzazione minima, ovvero di dimensione minime. Chiaramente le dimensione $m$ e $p$ sono fissate dalle dimensione dello spazio degli ingressi e qiello delle uscite, ovvereo dal numero dell colonne di $W$ e dal numero delle sue righe. Quello su cui si può "giocare dsono le dimensioni di $A$ ovvero sulla dimensione dello spazio degli stati. La realizzazione è minima se coinvolege il minimo numero di variabili di stato.

**Definizione: Realizzazione minima** La realizzazione $(A, B, C)$ della matrice di funzioni razionale $W(s)$ strettamente è una realizzazione *minima* se non esiste un'altra realizzazione $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ dove

$$dim(\tilde{A}) < dim(A)$$

### 5.2.1 Relazioni tra la minimalità e le proprietà strutturali

Vale il seguente risultato fondamentali: **Theorema** La realizzazione $(A, B, C)$ della funzione di trasferimento $W(s)$ è minima se e solo se il sistema

$$\Sigma(A, B, C)$$

è raggiungibile e osservabile.

Una delle implicazioni del teorema precedente è immediata. Infatti se $\Sigma(A, B, C)$ non è raggiungibile o osservabile, usando la decomposizione di Kalman, possiamo estrarre il sottosistema raggiungibile e osservabile, che ha la stessa funzione di trasferimento ed ha dimensioni di stato inferiori. L'implicazione inversa richiede una dimostrazione molto laboriosa ed è omessa.

Una realizzazione minima non è necessariamente unica. Infatti vale il seguente.

**Theorema** Date due terne di matrici $(A_1, B_1, C_1)$ e $(A_2, B_2, C_2)$ di pari dimensioni, raggiungibili e osservabili[1],esse sono realizzazioni minime della stessa funzione di trasferimento $W(s)$ se e solo se esiste una matrice invertibile $T$ tale che

$$A_2 = T^{-1}A_1T, \quad B_2 = T^{-1}B_1, \quad C_2 = C_1T$$

Anche in questo caso una delle implicazioni del teorema precedente è immediata. Infatti se esiste tale matrice $T$ abbiamo che

$$\begin{aligned} & C_2(sI - A_2)^{-1}B_2 = C_1T(sT^{-1}T - T^{-1}A_1T)^{-1}T^{-1}B_1 = \\ = \quad & C_1T[T^{-1}(sI - A_1)T]^{-1}T^{-1}B_1 = C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 \end{aligned}$$

La dimostrazione della implicazione inversa è tragica e verrà omessa.

Quindi il modo per determinare la realizzazione di una matrice di funzioni di trasferimento è il seguente

**Procedura**

1. Data $W(s)$ propria calcolarne la parte costante

   $$W(s) = D + \tilde{W}(s)$$

   ottenendo la matrice $D$ e la parte strettamente propria.

2. Calcolare una qualunque terna $(A^*, B^*, C^*)$ che realizzi la $\tilde{W}(s)$ (per esempio tramite le (5.1-5.2)).

3. Si elimini la parte non raggiungibile di $(A^*, B^*, C^*)$ ottenendo una realizzazione minima.

Si noti che se $(A^*, B^*, C^*)$ è presa come in (5.1-5.2)) non occorre fare un test di raggiungibilità in quanto la terna è raggiungibile. Basta eliminare la parte non osservabile.

### 5.2.2 Relizzazione minima di sistemi SISO

Nel caso di sistemi ad un ingresso ed una uscita esistono diversi modi di realizzare una funzione di trasferimento. Il più classico è quello basato sulla forma di Frobenius. Data una funzione di trasferimento

$$w(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{n_{\nu-1}s^{\nu-1} + n_{\nu-2}s^{\nu-2} + \ldots + n_1s + n_0}{s^\nu + d_{\nu-1}s^{\nu-1} + \ldots + d_1s + d_0}$$

[1] quindi realizzazioni minime delle loro f.d.t.

supponiamo che $n(s)$ e $d(s)$ non abbiamo radici in comune. Allora la terna

$$A_F = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I \\ -d_0 & -d_1 & -d_2 & \dots & -d_{n-2} & -d_{n-1} \end{bmatrix} \qquad B_F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}$$

$$C_F = \begin{bmatrix} n_0 & n_1 & n_2 & \dots & n_{n-2} & n_{n-1} \end{bmatrix}$$

è una realizzazione minima (detta realizzazione di Frobenius).

Questa realizzazione può essere implementata fisicamente per via analogica tramite amplificatori operazionali. Infatti tale realizzazione corriasponde allo schema a blocchi in Fig. 5.1 dove, pe completezza, è stato anche inserito il blocco relativo alla parte costante $D$.

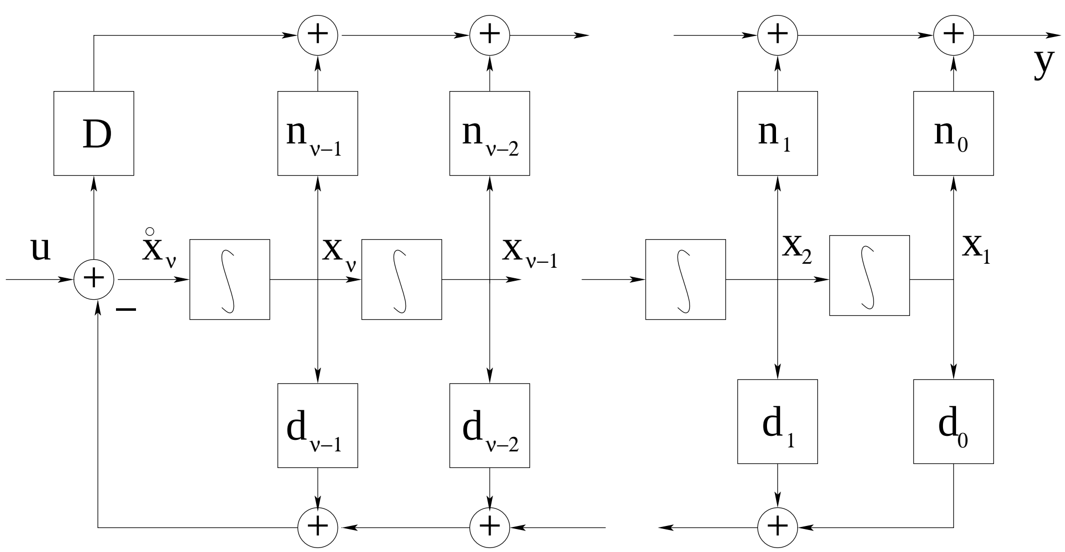


Figura 5.1: Lo schema a blocchi della realizzazione

Tramite oprazionali è possibile realizzare dei moltiplicatori per costanti, dei sommatori e degli integratori qundi lo schema è implementabile.

Altrimenti l'implementazione è possibile per via digitale. In qesto caso basta procedere in modo del tutto analogo. Lo schema blocchi reast immutato a parte il fatto che agli integratori deve essere sostituito un blocco ritardatore.