Topologia 2
2006/07, Gruppi Topologici
D. Dikranjan, UDINE

Gruppi topologici

D. Dikranjan

1 Introduzione

Lo scopo di questi appunti e di coprire il materiale insegnati nel corso di Topologia 2 sui gruppi topologici è di dare la possibilità al lettore di poter leggere senza difficoltà i testi più avanzati sui gruppi topologici come [DPS, HR, O].

Nel §2 includiamo i prerequisiti di topologia generale necessari per la lettura di questo testo (per ulteriori informazioni si possono consultare i classici testi [Du, E] oppure gli appunti [DAT]). Nel §3 diamo gli assiomi che definiscono i gruppi topologici e le prime proprietà elementari. Nel §3.3 diamo esempi di topologie gruppali. Nel §3 si calcola la chiusura e si vede che in un gruppo topologico coincidono tutte gli assiomi di separazione $T_0 - T_{3,5}$. Alla fine di questo paragrafo facciamo un collegamanto con alcuni problemi noti della teoria dei gruppi (il problema di Markov, il problema di Burnside, il problema di Kurosch (dell'esistenza di gruppo di Jónsson). Il §4 tratta prodotti e quozienti. Sono rivisti tutti gli isomorfismi noti nel contesto algebrico, alcuni risultano anche isomorfismi topologici. Per gli altri sono dati esempi in cui l'isomorfismo non è topologico. Qui sono descritti anche i sottogruppi chiusi di $\mathbb{R}^n$, il che permette di trovare molti gruppi monotetici. Nel §6 si ricordano i fatti necessari sulle basi e si trattano i gruppi metrizzabili. Tramite le pseudometriche invarianti si dimostra che ogni gruppo topologico T_0 è una spazio di Tichonov.

Il §7 tratta la compattezza, qui c'è anche un ampio paragrafo sulla compattezza locale. Nel §8 si studiano i gruppi connessi e quelli totalmente sconnessi. Si dimostra il fatto fondamentale che ogni gruppo compatto e totalmente sconnesso ha topologia lineare (cioè, generata dai sottogruppi normali aperti).

Il §9 introduce i gruppi completi ed il completamento di un gruppo topologico. Ho dato preferenza all'approccio simmetrico di Raĭkov, i gruppi completi nel senso di Weil sono trattati dopo e possono anche essere saltati in una prima lettura.

Nel §10 si studiano i gruppi precompatti e si dimostra che sono precisamnete i sottogruppi dei gruppi compatti. Il §11 tratta la dualità di Pontryagin. Nel 12 paragrafo sono descritti i gruppi pseudocompatti, cioè quelli che soddisfano il teorema di Weierstrass (le funzioni continue a valori reali sono limitate) ed i gruppi numerabilmente compatti. Nel §13 diamo un breve cenno sulla costruzione, notevolmente più facile, del completamento di un gruppo munito di topologia lineare. In particolare, qui troviamo anche i gruppi pro-finiti. Nel §14 si studiano i gruppi simmetrici infiniti e si dimostra che sono completi e topologicamente semplici (ma non sono completi nel senso di Weil) e si dimostra una versione topologica del teorema di Cayley. Sono definiti anche i gruppi minimali, che qui non sono trattati in dettaglio (cf. [DPS]) per poter discutere una proprietà estremale della topologia del gruppo simmetrico.

Tutto quanto detto qui è in versione del tutto preliminare. Si intende preparare una versione completa nel seguito.

Udine, 19.01.2007 Dikran Dikranjan

Contents

2 Prerequisiti della teoria degli insiemi e la topologia generale

2.1 Prerequisiti dalla teoria degli insiemi

Nel seguito per un insieme X denotiamo con $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti (sottoinsiemi) di X.

Diremo che un insieme X è *finito*, se X è vuoto o esiste un numero naturale $n > 0$ e una biezione $\{1, 2, \ldots, n\} \to X$. Diremo in tal caso che X ha cardinalità n e scriveremo $|X| = n$ e $|\emptyset| = 0$. Non è dificile dimostrare per induzione su $n = |X|$ che ogni iniezione $X \to X$ di un insieme finito X è anche una suriezione.

Nel seguito per un insieme X e $n \in \mathbb{N}$ denotiamo con $[X]^n$ (rispettivamente, con $[X]^{\leq n}$) l'insieme dei sottoinsiemi di (rispettivamente, con al più) n elementi di X.

2.1.1 Ordini e Assioma della scelta

Ricordiamo adesso i concetti di relazione di ordine e preordine.

Definizione 2.1 Una relazione binaria $\leq$ in un insieme X si dice *relazione di ordine*, se $\leq$ é riflessiva, transitiva e antisimmetrica.

Un insieme X dotato di una relazione d'ordine $\leq$ si dice un *insieme ordinato* e due elementi x, y di un insieme ordinato $(X, \leq)$ si dicono *confrontabili* se $x \leq y$ oppure $y \leq x$. Un ordine $\leq$ su X si dice *buono* (e $(X, \leq)$ si dice *ben ordinato*) se ogni sottoinsieme non-vuoto di X ha un elemento minimo.

I prodotti cartesiani infiniti richiedono un alteriore assioma della teoria degli insiemi, detta Assioma della scelta. Sia $\{A_i\}_{i \in I}$ una famiglia non vuota (cioè, $I \neq \emptyset$) di insiemi non vuoti A_i. Una *funzione di scelta* per questa famiglia è un'applicazione $f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ tale che $f(i) \in A_i$ per ogni $i \in I$. Nel caso dei prodotti cartesiani finiti é possibile descrivere il prodotto cartesiano, a meno di una biezione, come l'insieme di tutte le funzioni scelta. Nel caso di prodotto cartesiano di famiglie arbitrarie, questa resta l'unica strada da percorrere:

Definizione 2.2 Il *prodotto cartesiano* della famiglia $\{A_i\}_{i \in I}$, denotato con $\prod_{i \in I} A_i$, è l'insieme di tutte le funzioni di scelta della famiglia $\{A_i\}_{i \in I}$.

Esercizio 2.3 *Usando l'assioma della scelta dimostrare che se esiste un'applicazione suriettiva $A \to B$ allora esiste un'applicazione iniettiva $B \to A$.*

Se esiste un'applicazione iniettiva $B \to A$, allora si può costruire facilmente un'applicazione suriettiva $A \to B$ (senza far ricorso all'assiome della scelta).

Un insieme parzialmente ordinato $(X, \leq)$ si dice *induttivo* se ogni catena ha un maggiorante.

Lemma di Zorn. *Ogni insieme parzialmente ordinato e induttivo ammette elementi massimali.*

La dimostrazione di questo lemma usa l'assioma della scelta. D'altra parte, il Lemma di Zorn implica l'assioma della scelta. In altre parole, il Lemma di Zorn é equivalente all'assioma della scelta.

Anche il seguente teorema risulta equivalente all'assioma della scelta.

Lemma di Zermelo. *Ogni insieme non vuto ammetto un buon ordine.*

2.1.2 Numeri cardinali

Un insieme X si dice *infinito*, se esiste un'applicazione iniettiva, ma non suriettiva $f : X \to X$. Pertanto, un insieme infinito non è finito.

Lemma 2.4 *Sia X un insieme non-vuoto e sia $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ una famiglia di sottoinsiemi di X tali che*
a) $X = \bigcup_{i \in I} A_i$,
b) $\mathcal{A}$ é chiusa per intersezioni.
Allora la relazione $\sim$ su X definita da $x \sim y$ se e solo se per ogni $i \in I$ si ha $x \in A_i$ se e solo se $x \in A_i$, è una relazione di equivalenza.

Teorema 2.5 *Per un insieme X le seguenti tre condizioni sono equivalenti:*
(a) X è infinito,
(b) esiste un'applicazione iniettiva $h : \mathbb{N} \to X$;
(c) X non è finito.

Dimostrazione. (a) $\rightarrow$ (b) Essendo X è infinito esiste un'applicazione $f : X \rightarrow X$ iniettiva, ma non surviettiva. Sia $\mathcal{A}$ la famiglia di tutti sottoinsiemi A di X tali che $f(A) \subseteq A$ e $f^{-1}(A) \subseteq A$. Non è difficile vedere che $\mathcal{A}$ soddisfa le ipostesi del Lemma 2.4. Quindi la relazione definita come nel lemma risulta essere una relazione di equivalenza. Sia $X = \bigcup_{i \in I} C_i$ la partizione relativa a $\sim$ e sia $x \in X \setminus f(X)$. Allora la classe C di x ha la proprietà desiderata:

1) esiste una funzione iniettiva $s : C \rightarrow C$ (la restrizione di f;

2) $C \setminus s(C) = \{x\}$;

3) se $x \in A \subseteq C$ ha la proprietà, che $c \in A$ implica anche $f(c) \in A$.

(b) $\rightarrow$ (a) Supponiamo che esiste un'applicazione iniettiva $h : \mathbb{N} \rightarrow X$. Allora possiamo scrivere $X = h(\mathbb{N}) \cup Y$, dove $Y = X \setminus h(\mathbb{N})$. Sia $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ l'applicazione definito con $s(n) = n + 1$. Allora l'applicazione $f : X \rightarrow X$ che coincide con $h \circ s \circ h^{-1}$ su $h(\mathbb{N})$ e l'identità su Y è iniettiva, ma non suriettiva.

(b) $\rightarrow$ (c) ovvia.

(c) $\rightarrow$ (a) Basta dimostrare che se un isieme X non è infinito, allora esiste una una biezione $X \rightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$. Ragioniamo ad assurdo, supponendo che non esiste alcuna biezione $\{1, 2, \ldots, n\} \rightarrow X$. Quindi, non esiste alcuna suriezione $\{1, 2, \ldots, n\} \rightarrow X$. Pertanto, esistono almeno $n + 1$ elementi distinti di X. Possiamo costruire cosí una iniezione $\mathbb{N} \rightarrow X$. Supponiamo di aver già definito $f(0), \ldots, f(n-1)$. Poichè X ha un elemento x diverso da $f(0), \ldots, f(n-1)$, possiamo porre $f(n) = x$ ecc.

L'esistenza di un insieme infinito richiede un'assima specifico, detto assioma di Cantor.

In analogia con il caso di un insieme finito A, introduciamo qui un concetto di "misura" $|A|$ anche per insiemi infiniti A. Scriveremo $|A| \leq |B|$ se esiste un'applicazione iniettiva $A \rightarrow B$ e scriveremo $|A| < |B|$ se vale $|A| \leq |B|$, ma non vale $|B| \leq |A|$. Se $|A| <\leq |B|$, allora esiste anche un un'applicazione suriettiva $B \rightarrow A$. Per l'esercizio 2.3 esiste un'applicazione suriettiva $A \rightarrow B$ se e solo se esiste un'applicazione iniettiva $B \rightarrow A$. Infine, poniamo $|A| = |B|$, dicendo che A e B sono *equipotenti*, se esiste una biezione $A \rightarrow B$. Vedremo nel seguito che questo equivale alla validità simultaneamente di $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |A|$ (vedi Teorema di Cantor–Bernstein).

Il seguente Teorema di Cantor-Bernstein fornisce un metodo utile alla determinazione di insiemi equipotenti:

Teorema di Cantor-Bernstein. *Siano S e T due insiemi non vuoti. Se esistono iniezioni $S \rightarrow T$ e $T \rightarrow S$, allora esiste anche una biezione $S \rightarrow T$.*

Dimostrazione. Consideriamo il seguente caso particolare del teorema di Bernstein, nel quale uno degli insiemi è sottoinsieme dell'altro e la rispettiva iniezione è l'inclusione. *Se $f : X \rightarrow X$ é un'applicazione iniettiva, allora per ogni un sottoinsieme Y di X, tale che $f(X) \subseteq Y \subseteq X$, esiste una biezione $h : Y \rightarrow X$.* Vediamo subito che il caso generale si deduce facilmente da questo caso. Infatti, per le iniezioni $r : S \rightarrow T$ e $q : T \rightarrow S$ basta coniderare $X = S$, $Y = q(T)$ e $f = q \circ r$.

Per definire una biezione $g : Y \rightarrow X$ basta definire una biezione $s : Y \rightarrow f(X)$ e comporla con l'inversa di f su $f(X)$. Si consideri in Y la relazione R cosí definita:

$$xRy \Leftrightarrow \text{ esistono } n, m \in \mathbb{N} \text{ con } \; f^n(x) = f^m(y).$$

Si dimostra facilmente che R é una relazione di equivalenza. Siano $\{C_i\}_{i \in I}$ le classi di equivalenza. Allora essi formano una partizione $\bigcup_{i \in I} C_i$ di Y. Ora definiamo s nel modo seguente. Sia $y \in C_i$. Se $C_i \subseteq f(X)$ poniamo $s(y) = y$. Se $C_i \not\subseteq f(X)$, poniamo $s(y) = f(y)$. Per far vedere che s è biettiva basta vedere che $s(Y) = f(X)$ e s è iniettiva. Supponiamo che $s(y) = s(y')$ per $y, y' \in Y$. Allora yRy' dalla definizione di s. Quindi y e y' appartengono alla stessa classe di equivalenza C_i. L'applicazione s ristretta a C_i coincide con l'identità di C_i oppure con la restrizione di f, ma in entrambi casi é iniettiva, pertanto $y = y'$. Per provare che s é anche surriettiva notiamo inanzitutto che $f(Y) \subseteq s(Y) \subseteq f(X)$, essendo $f(y) = s(y)$ oppure $f(y) = s(f(y))$ per ogni $y \in Y$. Per finire la verifica dell'inclusione $f(X) \subseteq s(Y)$ resta il caso di un elemento $f(x) \in f(X)$ con $x \in X \setminus Y$. Essendo $x \notin Y$, non si può avere $f^n(f(x)) = f^k(y)$ con $k, n \in \mathbb{N}$ e $k > n$. Quindi, se $yRf(x)$, allora $f^n(f(x)) = f^k(y)$ con $k, n \in \mathbb{N}$ e $k \leq n$, pertanto $y \in f(X)$ per la iniettività di f. Questo dimostra che la classe C_i di $f(x) \in Y$ é contenuta in $f(X)$. Quindi $f(x) = s(f(x)) \in s(Y)$.

Quando si ha $|A| = |B|$, diremo che A e B *hanno la stessa cardinalità* (sono equipotenti) e ci riferiamo al simbolo $|A|$ come *cardinalità* (o numero cardinale) di A.

Teorema di Hartogs. *Siano S e T due insiemi non vuoti. Allora esiste un'iniezione $S \rightarrow T$ oppure un'iniezione $T \rightarrow S$.*

Dimostrazione. Supponiamo che non esiste un'iniezione $T \rightarrow S$. La famiglia $\mathcal{F}$ di tutte le applicazione iniettive $j_A : A \rightarrow T$, con $A \subseteq S$, é ordinata nel modo seguente: si pone $j_A \leq j_B$ per un'applicazione $j_B : B \rightarrow T$ se $A \subseteq B$ e $j_B(a) = j_A(a)$ per ogni $a \in A$. Dimostriamo ora che l'ordine $\leq$ di $\mathcal{F}$ é induttivo. Infatti, sia $C = \{j_{B_i} : i \in I\}$ una catena in $\mathcal{F}$. Poniamo $B = \bigcup_{i \in I} B_i$ e definiamo $j_B : B \rightarrow T$ con $j_B(b) = j_{B_i}(b)$, se $b \in B_i$. La definizione è corretta, poichè se $b \in B_k$ per un altro $k \in I$, allora si ha $j_{B_i} \leq j_{B_k}$ oppure $j_{B_k} \leq j_{B_i}$. In entrambi casi $j_{B_k}(b) = j_{B_i}(b)$. Cosí abbiamo definito un elemento $j_B \in \mathcal{F}$ tale che $j_{B_i} \leq j_B$ for ogni $i \in I$. Quindi j_B è: una maggioranta per la catena C. Quindi $\mathcal{F}$ é induttivo. Pertanto $\mathcal{F}$ ha elementi massimali per il Lemma di Zorn. Sia $f = j_{B_0} : B_0 \to T$ é un tale elemento massimale. Se $B_0 = S$ abbiamo costruito una iniezione $S \to T$. Supponiamo ad assurdo che $B_0 \neq S$. Allora esiste un elemento $x \in S \setminus B_0$. Per la massimalità di j_{B_0} si ha $f(B_0) = T$. Infatti, se esistesse $y \in T \setminus f(B_0)$, si potrebbe estendere f su $B' = B_0 \cup \{x\}$ ponendo $j_{B'}(b) = b$ per tutti $b \in B_0$ e $j_{B'}(x) = y$. Allora $j_{B'}$ è iniettiva e $j_{B_0} < j_{B'}$, che contradice la massimalità di j_{B_0}. Questo dimostra l'uguaglianza $f(A_0) = T$. Per l'esercizio 2.3 esiste un'iniezione $T \to S$. Questo assurdo dimostra che $B_0 = S$.

Ora il teorema di Hartogs ci garantisce che per due insiemi S e T si ha sempre $|S| \leq |T|$ oppure $|T| \leq |S|$. In altre parole, i numeri cardinali sono sempre paragonabili. Il teorema di Cantor-Bernstein ci garantisce che se abbiamo simultaneamente $|S| \leq |T|$ e $|T| \leq |S|$, allora $|S| = |T|$.

Esercizio 2.6 *Per ogni insieme X si ha $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.*

DIMOSTRAZIONE. Notiamo che $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$ in quanto esiste l'applicazione $j_X : X \to \mathcal{P}(X)$ che manda ogni elemento $x \in X$ nel singoletto $\{x\}$ e tale applicazione é iniettiva. Per dimostrare che non vale $|X| \geq |\mathcal{P}(X)|$ basta notare che non esiste alcuna suriezione $X \to \mathcal{P}(X)$ per il teorema di Cantor.

Solitamente si pone $|\mathbb{N}| = \aleph_0$, $\mathbf{c} = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$ e si può provare che $|\mathbb{R}| = \mathbf{c}$ (per questo motivo $\mathbf{c}$ é detta anche *cardinalità del continuo*). L'affermazione: *ogni sottoinsieme infinito X di $\mathbb{R}$ soddisfa $|X| = \aleph_0$ o $|X| = \mathbf{c}$*, nota come *la Congettura del Continuo*, fu posta come problema aperto da D. Hilbert nel 1900.

2.1.3 Filtri e ultrafiltri

Sia X un insieme, una famiglia $\mathcal{F}$ di parti di X soddisfacente le seguenti condizioni si chiama un *filtro*:
(f_1) per ogni $U \in \mathcal{F}$ e $W \supseteq U$ si ha $W \in \mathcal{F}$;
(f_2) se $U \in \mathcal{F}$ e $U' \in \mathcal{F}$, allora anche $U \cap U' \in \mathcal{F}$;
(f_3) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Un filtro $\mathcal{F}$ si dice *fisso* se $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$ appartiene a $\mathcal{F}$. In tal caso, $\mathcal{F}$ consiste ovviamente di tutti i sottoinsiemi di X che contengono $A = \bigcap \mathcal{F}$; chiameremo un filtro di questo tipo *filtro generato da A* e lo denoteremo con $[A]$.

Un esempio di un filtro non fisso è il filtro di Fréchet definito come la famiglia di tutti i sottoinsiemi co-finiti di un insieme infinito X ($A \subseteq X$ si dice *cofinito* se il complemento $X \setminus A$ è finito). Più in generale, se α è un numero cardinale minore di $|X|$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi $A \subseteq X$ con $|X \setminus A| \leq \alpha$ forma un filtro.

Se $f : X \to Y$ e $f(\mathcal{F}) = \{A \subseteq Y : f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$, allora $f(\mathcal{F})$ è un filtro su Y.

Per due filtri $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ consideriamo l'ordine definito dall'inclusione $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ (questo significa che ogni $F \in \mathcal{F}$ appartiene anche a $\mathcal{G}$). In questo modo la famiglia $\mathbf{Fil}_X$ di tutti filtri su X diventa un insieme parzialmente ordinato. Si può vedere che $(\mathbf{Fil}_X, \subseteq)$ è induttivo (cioè, ogni catena è superiormente limitata, vedi il Teorema 2.10).

Definizione 2.7 Un filtro $\mathcal{F}$ si dice *ultrafiltro* se $\mathcal{F}$ è un elemento massimale di $\mathbf{Fil}_X$.

È facile vedere che un filtro fisso $[A]$ è un ultrafiltro se e solo se A ha un punto solo; di conseguenza X ha precisamente $|X|$ ultrafiltri fissi.

Il seguente criterio è utile per caratterizzare gli ultrafiltri.

Lemma 2.8 *Un filtro $\mathcal{F}$ è un ultrafiltro se e solo se per ogni $B \subseteq X$ si ha $B \in \mathcal{F}$ oppure $X \setminus B \in \mathcal{F}$.*

Corollario 2.9 *Sia $\mathcal{F}$ un ultrafiltro su X:*

(1) se per $F_1, \ldots, F_n$ sottoinsiemi di X si ha $F_1 \cup \ldots \cup F_n \in \mathcal{F}$ allora esiste i con $F_i \in \mathcal{F}$;

(2) se $F \in \mathcal{F}$ allora $\mathcal{G} = \{G \in \mathcal{F} : G \subseteq F\}$ è un ultrafiltro su F;

(3) Se $f : X \to Y$, allora il filtro $f(\mathcal{F})$ è un ultrafiltro su Y.

Il fatto che esistano ultrafiltri non fissi non è affatto banale. Esso dipende dall' Assioma della Scelta (abbreviato AC).

Teorema 2.10 *Sotto l'assunzione dell'assioma della scelta, ogni insieme infinito X ammette un ultrafiltro non fisso. Più precisamente, ogni filtro su X è contenuto in un ultrafiltro di X.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{F}$ un filtro su X. Allora la famiglia $\mathbf{S} := \{\mathcal{G} \in \mathbf{Fil}_X : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}\}$, è induttiva e quindi si può applicare il lemma di Zorn per ricavare un elemento massimale in $\mathbf{S}$ che sarà necessariamente un ultrafiltro. ♣

Si può dimostrare che X ammette $2^{2^{|X|}}$ ultrafiltri non fissi. Questo è ovviamente il numero più grande possibile poiché la cardinalità di $\mathbf{Fil}_X$ non può superare $2^{2^{|X|}}$ essendo ogni filtro un sottoinsieme di $P(X)$ e quindi elemento dell'insieme $P(P(X))$ di cardinalità $2^{2^{|X|}}$.

Un ultrafiltro non fisso $\mathcal{U}$ su un insieme (necessariamente infinito) X si può vedere anche come misura finitamente additiva sulle parti di X ponendo $\mu_{\mathcal{U}}(A) = 1$ per $A \subseteq X$ se e solo se $A \in \mathcal{U}$. Ovviamente $\mu_{\mathcal{U}}$ assume due soli valori, 0 e 1. In più, ogni parte A di X risulta misurabile (vedi (1) del Corollario 2.9). In generale questa misura potrebbe non essere σ-additiva, che vuol dire in questo caso:

$$\text{se } A_n \in \mathcal{U} \text{ per } n = 1, 2, \dots \text{ allora anche } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{U}. \tag{$*$}$$

Ovviamente, l'esistenza o meno di un ultrafiltro $\mathcal{U}$ con questa proprietà su X dipende solamente dalla cardinalità di X. I cardinali α per i quali esistono ultrafiltri con $(*)$ su qualche insieme di cardinalità α si chiamano *misurabili*. Se α è misurabile e $\alpha \leq \beta$ anche β risulta misurabile (sfruttare la proprietà(3) nel Corollario 2.9 rispetto ad una inclusione f di un insieme X con $|X| = \alpha$ in un insieme Y con $|Y| = \beta$). Denotiamo con $\mathbf{m}$ il più piccolo cardinale misurabile. Allora $\mathbf{m}$ è fortemente inaccessibile (cioè è regolare e per ogni $\gamma < \mathbf{m}$ anche $2^\gamma < \mathbf{m}$). L'esistenza di cardinali misurabili non è dimostrabile all'interno dell'assiomatica ZFC (Zermelo Fraenkel + Assioma della scelta). Infatti, la consistenza di ZFC implica la consistenza del fatto che non esistono cardinali misurabili.

2.2 Come si introduce una topologia

Definizione 2.11 Dicesi *spazio topologico* un insieme X munito di una famiglia τ di sottoinsiemi, detti *aperti*, con le seguenti proprietà:

(a_1) L' unione di una qualunque famiglia di insiemi aperti è un insieme aperto;

(a_2) L' intersezione di una famiglia finita di insiemi aperti è un insieme aperto;

(a_3) X e $\emptyset$ sono insiemi aperti.

Denoteremo con (X, τ) lo spazio topologico così definito. Un sottoinsieme A di uno spazio topologico (X, τ) è *chiuso* se $X \setminus A$ è aperto.

Esercizio 2.12 *Sia X uno spazio topologico. Dimostrare che la famiglia dei sottoinsiemi chiusi di X soddisfa le condizioni:*

(c_1) L' unione di una famiglia finita di insiemi chiusi è un insieme chiuso;

(c_2) L'ntersezione di una qualunque famiglia di insiemi chiusi è un insieme chiuso;

(c_3) X e $\emptyset$ sono insiemi chiusi.

Una topologia si può introdurre anche tramite la famiglia $\mathcal{F}$ dei suoi sottoinsiemi chiusi. In tal caso si chiede che $\mathcal{F}$ soddisfi (c_1), (c_2) e (c_3). Adesso si possono introdurre gli insiemi aperti come quelli che hanno complemento chiuso. Si verifica facilmente che la famiglia τ degli aperti soddisfa le condizioni (a_1), (a_2) e (a_3). Allora i chiusi dello spazio topologico (X, τ) sono precisamente i membri di $\mathcal{F}$.

In ogni spazio topologico X gli insiemi $\emptyset$ e X sono sempre simultaneamente chiusi ed aperti, ma in generale(come in $X = \mathbb{R}$) potrebbero non esserci altri $A \subseteq X$ con questa proprietà.

Per uno spazio topologico (X, τ) e un sottoinsieme Y si vede facilmente che la famiglia $\{Y \cap U : U \in \tau\}$ di sottoinsiemi di Y soddisfa la condizioni (a_1)-(a_3) e quindi definisce una topologia su Y che chiameremo *topologia indotta* (o relativa) da X, mentre Y munito di questa topologia sarà chiamato *sottospazio* di (X, τ).

La topologia discreta su un insieme X ha come aperti tutti i sottoinsiemi di X. *La topologia indiscreta* su un insieme X ha come aperti X e $\emptyset$. L'insieme $\{0, 1\}$ munito della topologia che ha come aperti $\emptyset$, $\{0\}$ e $\{0, 1\}$ è noto come *spazio di Sierpiǹski.*

La topologia indotta da una metrica. Sia (X, d) uno spazio metrico. Gli aperti di X formano una topologia τ_d, detta *topologia metrica.* Notare che diverse metriche possono indurre la stessa topologia. Uno spazio topologico (X, τ) si dice *metrizzabile* se X ammette una metrica per la quale τ coincide con la topologia metrica τ_d.

Esercizio 2.13 (La topologia co-numerabile) *Sia X lo spazio topologico definito sui numeri reali avente come insiemi chiusi tutti gli insiemi al più numerabili e l'insieme X. Verificare che :*

(a) *se una successione $\{x_n\}$ converge verso x, allora quasi tutti gli x_n coincidono con x;*

(b) *dedurre che la topologia così definita non è indotta da una metrica.*

Trovare delle condizioni necessarie e sufficienti affinchè uno spazio topologico sia metrizzabile è stato uno dei maggiori problemi della topologia. Noi daremo delle condizioni sufficienti in 2.61, 2.55.

2.2.1 Intorni, chiusura, interno, frontiera

Sia X uno spazio topologico e sia $x \in X$. *Intorno* del punto x è un sottoinsieme M di X tale che esiste un aperto U con $x \in U$ e $U \subseteq M$. Si dimostra come nel caso degli spazi metrici che la famiglia $\mathcal{V}(x)$ di tutti gli intorni di x ha le proprietà:

(i_1) per ogni $U \in \mathcal{V}(x)$ e $W \supseteq U$ si ha $W \in \mathcal{V}(x)$;
(i_2) se $U \in \mathcal{V}(x)$ e $U' \in \mathcal{V}(x)$, allora anche $U \cap U' \in \mathcal{V}(x)$;
(i_3) per ogni $U \in \mathcal{V}(x)$ esiste un $V \in \mathcal{V}(x)$ con $V \subseteq U$ e $V \in \mathcal{V}(y)$ per ogni $y \in V$.

Viceversa, se su un insieme X abbiamo assegnato ad ogni $x \in X$ un filtro $\mathcal{V}(x)$ di insiemi $V \subseteq X$ contenenti x che soddisfano anche (i_1)-(i_3), si può definire su X una topologia τ avente come aperti tutti i $V \subseteq X$ tali che $V \in \mathcal{V}(x)$ per ogni $x \in V$ (i.e., V è "intorno" di ogni suo punto). I filtri di intorni per questa topologia sono precisamente i filtri di partenza $\mathcal{V}(x)$.

Definizione 2.14 Per un sottoinsieme A di uno spazio topologico X la chiusura $\overline{A}$ consiste di tutti i punti $x \in X$ tale che ogni loro intorno U interseca A.

Esercizio 2.15 *Dimostrare che la chiusura $\overline{A}$ di A coincide con l'intersezione di tutti gli insiemi chiusi di X contenenti A.*

Raccogliamo le proprietà della chiusura nell'osservazione seguente:

Proposizione 2.16 *Sia X uno spazio topologico. Allora $A \subseteq X$ è chiuso se e solo se $A = \overline{A}$. In più valgono:*
(K1) $A \subseteq \overline{A}$;
(K2) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;
(K3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
(K4) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

Kuratowski ha notato che le proprietà (K1)-(K4) caratterizzano la chiusura. In suo onore un operatore (anche arbitrario) $A \mapsto \overline{A}$ definito sulle parti di un insieme X avente le proprietà (K1)-(K4) si dice *operatore di Kuratowski.*

Teorema 2.17 *Sia X un insieme e sia $A \mapsto \overline{A}$ un operatore di Kuratowski su X. Allora esiste un' unica topologia τ su X per la quale gli insiemi chiusi sono definiti con la formula $\overline{A} = A$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{F}$ la famiglia di tutte le parti di X che soddisfano $A = \overline{A}$. Si verifica facilmente che la famiglia $\mathcal{F}$ soddisfa gli assiomi (c_1), (c_2) e (c_3) e quindi costituisce la famiglia dei chiusi di X rispetto ad una topologia τ. Ovviamente, la chiusura (in τ) di un $A \subseteq X$ è proprio $\overline{A}$. ♣

Uno studio approffondito degli operatori di chiusura (sia in topologia, sia in algebra) dal punto di vista categorico si trova in [DT].

Interno Int A di un insieme A in uno spazio topologico X ha come punti tutti gli $x \in X$ per i quali esiste un intorno U contenuto in A. La *frontiera* Fr A di A è definita come $\overline{A} \setminus$ Int A.

Esercizio 2.18 *Dimostrare che l'interno di A coincide con l'unione di tutti gli insiemi aperti di X contenuti in A. Dedurre che* $\mathrm{Int}\, A = X \setminus \overline{X \setminus A}$ e $\overline{A} = X \setminus \mathrm{Int}\,(X \setminus A)$.

Lasciamo al lettore il compito di scrivere le proprietà che caratterizzano l'interno in modo assiomatico, nello spirito delle condizioni (K1)-(K4).

Esercizio 2.19 *Dimostrare che in $\mathbb{R}$ si ha:* $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathrm{Fr}\, \mathbb{Q} = \mathrm{Fr}\,(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Int}\, \mathbb{Q} = \mathrm{Int}\,(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$, *Int* $[a, b] = \mathrm{Int}\, [a, b) = \mathrm{Int}\, (a, b] = (a, b)$, $\overline{(a, b)} = \overline{\mathbb{Q} \cap (a, b)} = \mathrm{Fr}\, \mathbb{Q} \cap (a, b) = [a, b]$, $\mathrm{Fr}\, [a, b] = \mathrm{Fr}\, (a, b) = \{a, b\}$ *se $a < b$.*

Un sottoinsieme D di uno spazio topologico X si dice *denso* se $\overline{D} = X$.

Esercizio 2.20 *Sia D un sottoinsieme denso in uno spazio topologico X. Allora per ogni aperto U in X si ha $\overline{U} = \overline{U \cap D}$.*

Dimostrazione. Infatti se $U = \emptyset$ questo è ovvio. Altrimenti, per $x \in \overline{U}$ e $x \in V$ con V aperto si ha $V \cap U \neq \emptyset$ ed è aperto. Allora $V \cap U \cap D \neq \emptyset$ e dunque $x \in \overline{U \cap D}$. ♣

2.2.2 Convergenza di filtri e di reti

Si dice che un filtro $\mathcal{F}$ in uno spazio topologico X converge verso un punto $x \in X$ se $\mathcal{F}$ contiene il filtro $\mathcal{V}(x)$, ossia, per ogni intorno U di x esiste un $F \in \mathcal{F}$ tale che $F \subseteq U$. In particolare il filtro $\mathcal{V}(x)$ converge verso x.

Punto di accumulazione di un filtro $\mathcal{F}$ su X è un punto $x \in X$ tale che $x \in \overline{F}$ per ogni $F \in \mathcal{F}$. Denotiamo con $ad\mathcal{F}$ l'insieme dei punti di accumulazione del filtro $\mathcal{F}$, i.e., $ad\mathcal{F} := \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{F}$. Se $\mathcal{F} \to x$ allora $x \in ad\mathcal{F}$, ma in generale queste due proprietà non coincidono. Questo accade se $\mathcal{F}$ è un ultrafiltro. Infatti, in tal caso $x \in ad\mathcal{F}$ implica $U \cap F \neq \emptyset$ per ogni $\mathcal{V}(x)$ e per ogni $F \in \mathcal{F}$. Questo implica $\mathcal{V}(x) \subseteq \mathcal{F}$, cioè $\mathcal{F} \to x$. Punto di accumulazione e limite si introduce in modo analogo anche per una base di filtro.

La convergenza delle successioni in uno spazio topologico non basta per recuperare la sua topologia. Per descrivere la topologia nel caso generale serve un altro tipo di convergenza introdotto da Moore e Smith che copre come caso particolare anche la convergenza delle successioni usuali.

Sia $(A, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato. Diremo che $(A, \leq)$ è *filtrante a destra* se per ogni $a, b \in A$ esiste $c \in A$ tale che $a \leq c$ e $b \leq c$. Una parte B di A si dice *cofinale* se per ogni $a \in A$ esiste $b \in B$ con $a \leq b$. Sia X un insieme e $(A, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato filtrante a destra. Una *rete* $S = \{x_a : a \in A\}$ in X è una funzione $s : A \to X$ con $s(a) = x_a$. Poichè ogni insieme totalmente ordinato (in particolare, $\mathbb{N}$ con l'ordine usuale) è filtrante a destra, ogni successione $\{x_n\}$ in X è una rete $\mathbb{N} \to X$ definita con $n \mapsto x_n$.

Sia X uno spazio topologico e sia $\{x_a : a \in A\}$ una rete in X. Diremo che la rete $\{x_a : a \in A\}$ *converge verso il punto* $x \in X$ se per ogni intorno U di x esiste $a_0 \in A$ tale che per ogni $a \geq a_0$ in A si ha $x_a \in U$. In tal caso scriveremo $x = \lim x_a$.

Esercizio 2.21 *Sia X uno spazio topologico e sia $x \in X$. Consideriamo l'insieme $\mathcal{A}$ degli intorni di x con l'ordine inverso, cioè $U \leq V$ per $U, V \in \mathcal{A}$ se $U \supseteq V$. Allora:*

1. *$(\mathcal{A}, \leq)$ è filtrante a destra;*
2. *se per ogni $U \in \mathcal{A}$ si sceglie un punto $x_U \in U$, allora la rete $\{x_U : U \in \mathcal{A}\}$ converge verso il punto x.*
3. *Sia F un sottoinsieme di X. Allora $x \in \overline{F}$ se e solo se esiste rete convergente $\{x_a : a \in A\}$ con $x = \lim x_a$ e $x_a \in F$ per ogni $a \in A$.*
4. *Sia F un sottoinsieme di X. Allora F è chiuso se e solo se ogni rete convergente $\{x_a : a \in A\}$ con $x_a \in F$ per ogni $a \in A$ risulta $\lim x_a \in F$.*

Esercizio 2.22 *Sia X uno spazio topologico e sia $x \in X$ un punto.*

1. *Sia $S = \{x_a : a \in A\}$ una rete in X. Allora $\mathcal{B} = \{x_b : b \geq a\}_{a\in A}$ é una base di filtro in X. Dimostrare che:*
   (a) $\mathcal{B}$ converge a $x \in X$ se e solo se la rete x_a converge a x.
   (b) x è un punto di accumulazione della rete S se e solo se x è un punto di accumulazione di $\mathcal{B}$.
2. *Sia $\mathcal{F} = \{F_a : a \in A\}$ un filtro in X. Allora per $a, b \in A$ poniamo $a \leq b$ se $F_a \supseteq F_b$. Dimostrare che l'insieme parzialmente ordinato $(A, \leq)$ é filtrane a destra e per ogni scelta di un punto $x_a \in F_a$ la rete $S = \{x_a : a \in A\}$ converge a $x \in X$ se il filtro $\mathcal{F}$ converge a x.*

   Inoltre, se il filtro $\mathcal{F}$ non converge a x, per ogni $F_a \in \mathcal{F}$ esiste un punto $x_a \in F_a$, tale che la rete $S = \{x_a : a \in A\}$ non converge a x.

2.3 Base e prebase di uno spazio topologico

Lavorare con *tutti* gli aperti di uno spazio topologico X può essere molto macchinoso e inefficiente. Per questo si cerca di individuare solo una parte essenziale di questi. A questo scopo si introduce il seguente concetto fondamentale.

Base di uno spazio topologico è una famiglia di aperti $\mathcal{B}$ con la proprietà che per ogni punto x dello spazio e ogni aperto U che contiene x esiste un aperto $V \in \mathcal{B}$ tale che $x \in V \subseteq U$. *Prebase* di uno spazio topologico X è una famiglia di aperti $\mathcal{B}'$ tale che gli insiemi del tipo $B_1 \cap \ldots \cap B_n$, con $B_i \in \mathcal{B}'$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $i = 1, 2, \ldots, n$, formino una base dello spazio.

Lemma 2.23 *Sia $\mathcal{B}$ una famiglia di sottoinsiemi non vuoti di un insieme X. Allora $\mathcal{B}$ è base di una topologia τ su X se e solo se $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X$ e per ogni coppia $B, B' \in \mathcal{B}$ e $x \in X$ con $x \in B \cap B'$ esiste un $B'' \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B'' \subseteq B \cap B'$.*

Dimostrazione. Definiamo τ assumendo come aperti tutte le unioni di insiemi di $\mathcal{B}$. Allora $\mathcal{B}$ è base della topologia τ. ♣

Lemma 2.24 *Sia $\mathcal{B}$ una famiglia di insiemi non vuoti di un insieme X. Allora $\mathcal{B}$ è prebase di una topologia τ su X se e solo se $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X$.*

Dimostrazione. Definiamo $\mathcal{B}'$ come la famiglia di tutte le intersezioni finite di membri di $\mathcal{B}$. Allora, per il lemma precedente, $\mathcal{B}'$ è una base di una topologia su X. ♣

Esercizio 2.25 *Dimostrare che in uno spazio metrico i dischi aperti di raggio razionale formano una base della topologia indotta dalla metrica.*

Si noti come la base di uno spazio topologico non sia necessariamente chiusa per intersezioni finite.

Esercizio 2.26 *Dimostrare che $\mathbb{R}$ ha una base numerabile.*

Suggerimento: Prendere come base la famiglia degli intervalli aperti (r, s) con $r < s$ numeri razionali.♣

Esercizio 2.27 *Dimostrare che uno spazio ha una base numerabile se e solo se ha una prebase numerabile.*

Esercizio 2.28 *Verificare che:*

(a) $\mathbb{R}$ *ha come prebase(numerabile) la famiglia di intervalli* $(-\infty, r)$, (r, ∞), *dove* $r \in \mathbb{Q}$;

(b) $\mathbb{R}^2$ *ha come prebase(numerabile) la famiglia dei semipiani* $\{x < r\}$, $\{x > r\}$, $\{y > r\}$, $\{y < r\}$, *dove* $r \in \mathbb{Q}$.

Notare che $\mathbb{R}$ ha precisamente $\mathbf{c}$ aperti (ogni intervallo $(a, +\infty)$ è aperto e d'altra parte, $\mathbb{R}$ ha $\leq \mathbf{c}$ aperti poiché $|P(\mathcal{B})| = \mathbf{c}$ dove $\mathcal{B} = \{(r, s) : r < s, \text{ razionali }\}$ è una base numerabile di $\mathbb{R}$ e ogni aperto è unione di una sottofamiglia dell' insieme $\mathcal{B} = \{(r, s) : r < s, \text{ razionali }\}$).

Esercizio 2.29 *Dare un esempio di uno spazio che non ha una base numerabile.*

Suggerimento: Provare che uno spazio discreto ha base numerabile se e solo se è numerabile; basta quindi prendere uno spazio discreto che non sia numerabile. ♣

Esercizio 2.30 *Sia X uno spazio topologico e $\mathcal{B}$ una base di X. Dimostrare che per ogni sottospazio Y di X la famiglia $\{U \cap Y : U \in \mathcal{B}\}$ è una base di Y.*

Esercizio 2.31 *Dimostrare che ogni sottospazio di uno spazio a base numerabile ha base numerabile.*

Definizione 2.32 Uno spazio topologico X si dice di *Lindelöff* se ogni suo ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento numerabile.

Proposizione 2.33 *Ogni spazio numerabile e ogni spazio a base numerabile sono di Lindelöff.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ una base numerabile di X e sia $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ un ricoprimento aperto di X. Per ogni $x \in X$ si scelga un $i \in I$ con $x \in U_i$. Allora esiste un elemento della base $B_x \in \mathcal{B}$ con $x \in B_x \subseteq U_i$. La famiglia $\{B_x : x \in X\}$ è numerabile (perché è contenuta in $\mathcal{B}$), quindi esiste una sottofamiglia numerabile di $\{U_i\}$ che ricopre X. Se X è numerabile si ragiona analogamente, ma senza ricorso alla base, poiché ora i punti x sono in quantità numerabile. ♣

2.4 Spazi topologici separabili

Il seguente lemma segue dal teorema precedente.

Lemma 2.34 *Ogni spazio topologico a base numerabile ha un sottoinsieme denso e numerabile.*

Una spazio topologico avente un sottoinsieme denso e numerabile si dice *separabile*.

Esercizio 2.35 *Dimostrare che uno spazio topologico che ha un sottospazio denso e separabile è anch'esso separabile.*

Teorema 2.36 *Dimostrare che per uno spazio metrico X le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(1) X è separabile;

(2) X ha base numerabile;

(3) X è di Lindelöff.

Dimostrazione. Supponiamo che valga (3) e consideriamo per un $n \in \mathbb{N}$ fisso il ricoprimento aperto $X = \bigcup_{x \in X} B_{1/n}(x)$ di X. Allora esiste un sottoricoprimento numerabile, cioè un insieme numerabile $C_n \subseteq X$ tale che

$$X = \bigcup_{x \in C_n} B_{1/n}(x). \tag{1}$$

Ora $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ è denso in X. Infatti, se $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$, allora esiste $y \in C_n \subseteq C$ tale che $x \in B_{\frac{1}{n}}(y)$, cioé $y \in B_{\frac{1}{n}}(x)$ ossia $B_{\frac{1}{n}}(x) \cap C \neq \emptyset$. Poiché questo è vero per ogni $n \in \mathbb{N}$ concludiamo che $x \in \overline{C}$. Questo dimostra che X è separabile. L'implicazione (1) $\to$ (2) segue da 2.33. ♣

Come visto sopra, gli spazi a base numerabile sono separabili ma il contrario non è in generale vero se lo spazio non è metrico.

Esercizio 2.37 *Sia X uno spazio metrico separabile. Dimostrare che ogni sottospazio di X è separabile.*

Vedremo nel seguito che questa proprietà degli spazi metrici separabili non si estende in generale.

2.5 Applicazioni continue e prodotti di spazi topologici

Un' applicazione $f : X \to Y$ tra due spazi topologici è *continua* se l'immagine inversa di ogni aperto di Y è aperta in X. Se f è biettiva e la sua inversa è continua, allora f è detta *omeomorfismo.* Gli spazi X e Y sono *omeomorfi* se esiste un omeomorfismo $X \to Y$.

Lemma 2.38 *Dimostrare che un' applicazione $f : X \to Y$ è continua se e solo se per ogni rete convergente $x_a \to x$ in X la rete $f(x_a) \to f(x)$ in Y.*

Un' applicazione $f : X \to Y$ è:

- *immersione* se $f : X \to f(X)$ è un omeomorfismo;
- *aperta* se per ogni insieme aperto $U \subseteq X$ anche $f(U)$ è aperto;
- *chiusa* se per ogni insieme chiuso $F \subseteq X$ anche $f(F)$ è chiuso.

Se X è un sottospazio dello spazio topologico Y allora l'inclusione insiemistica $f : X \hookrightarrow Y$ è un' immersione.

Esercizio 2.39 *Siano $f : X \to Y$ un' applicazione tra spazi topologici, $\mathcal{B}$ una base di X e $\mathcal{B}'$ una prebase di Y. Allora:*

(a) f è continua se e solo se l'immagine inversa tramite f di ogni aperto $V \in \mathcal{B}'$ è aperta in X;

(b) f è aperta se e solo se $f(U)$ è aperto in Y per ogni $U \in \mathcal{B}$.

Esercizio 2.40 *Se $f : X \to Y$ è un omeomorfismo tra due spazi topologici e $M \subseteq X$, allora anche M e $f(M)$ sono omeomorfi.*

Sia $\{X_i\}_{i \in I}$ una famiglia di spazi topologici, $X = \prod_{i \in I} X_i$ il loro prodotto cartesiano e $\forall i \in I \;\; p_i : X \to X_i$ la proiezione canonica. Su X si considera spesso la topologia , detta *topologia prodotto* o *topologia di Tichonov*, definita assumendo come prebase $\mathcal{B}$ la famiglia $\{p_i^{-1}(U_i) : i \in I, U_i \text{ aperto in } X_i\}$. In seguito il prodotto di spazi topologici sarà sempre dotato della topologia di Tichonov.

Esercizio 2.41 *Sia $\{X_i\}_{i \in I}$ una famiglia di spazi topologici e $X = \prod_{i \in I} X_i$ dotato della topologia di Tichonov. Dimostrare che:*

(a) *le proiezioni $p_i : X \to X_i$ sono continue;*

(b) *per ogni spazio topologico Y un' applicazione $f : Y \to X$ è continua se e solo se sono continue tutte le composizioni $p_i \circ f : Y \to X_i$;*

(c) *una successione $\{x_n\}$ in X è convergente se e solo se sono convergenti tutte le successioni $\{p_i(x_n)\}$, $i \in I$;*

(d) *se I è numerabile e tutti gli X_i sono spazi metrici, allora la topologia del prodotto è indotta dalla metrica definita sul prodotto degli X_i.*

Esercizio 2.42 *Il prodotto numerabile di spazi a base numerabile è ancora uno spazio a base numerabile.*

2.6 Assiomi di separazione.

Uno spazio X si dice:

- T_0 se per ogni coppia di punti distinti x e y di X esiste un insieme aperto U di X tale che $x \in U$ e $y \notin U$, oppure $x \notin U$ e $y \in U$;
- T_1 se per ogni coppia di punti distinti x e y di X esistono insiemi aperti U e V di X tale che $x \in U$ e $y \notin U$, $x \notin V$ e $y \in V$;
- T_2(o *di Hausdorff*) se per ogni coppia di punti distinti x e y di X esistono insiemi aperti disgiunti U e V di X tali che $x \in U$ e $y \in V$;
- *regolare* se per ogni punto $x \in X$ e per ogni insieme chiuso F di X con $x \notin F$ esistono due insiemi aperti disgiunti U e V di X tali che $x \in U$ e $F \subseteq V$;
- *completamente regolare* se per ogni punto $x \in X$ e per ogni insieme chiuso F di X con $x \notin F$ esiste una funzione continua $f : X \to [0,1]$ tale che $f(x) = 1$ e $f(F) = 0$;
- *normale* se per ogni coppia di insiemi chiusi disgiunti F e G di X esistono due insiemi aperti disgiunti U e V di X tali che $F \subseteq U$ e $G \subseteq V$;
- T_3 se è regolare e T_1;
- $T_{3.5}$(o *di Tychonov*) se è completamente regolare e T_1;
- T_4 se è normale e T_1.

2.6.1 Tra T_0 e T_2

Esercizio 2.43 *Dimostrare che uno spazio topologico X è*

- T_0 *se e solo se $x \in \overline{\{y\}}$ e $y \in \overline{\{x\}}$ implicano $x = y$ per ogni coppia di punti $x, y \in X$;*
- T_1 *se e solo se i punti di X sono chiusi;*
- T_2 *se e solo se la diagonale $\Delta_X := \{(x,x) : x \in X\}$ è chiusa in $X \times X$ munito della topologia prodotto;*
- *regolare se e solo se ogni punto ha una base di intorni chiusi.*

Esercizio 2.44 *Dimostrare che ognuna delle seguenti classi di spazi topologici è chiusa per passaggio a prodotti e per sottospazi:*

(a) spazi T_0;

(b) spazi T_1;

(c) spazi T_2.

Teorema 2.45 *Dimostrare che ogni spazio T_0 a base numerabile ha cardinalità al più* **c** *ed ha al più* **c** *aperti.*

Dimostrazione. Applicare il teorema precedente oppure considerare la seguente dimostrazione: fissata una base numerabile $\mathcal{B}$ dello spazio X, basta notare che ogni punto x è completamente determinato da un sottoinsieme di $\mathcal{B}$ (il sottoinsieme degli $U \in \mathcal{B}$ che contengono x). Poiché $\mathcal{B}$ è numerabile, $P(\mathcal{B})$ è equipotente a $P(\mathbb{N})$. ♣

Esercizio 2.46 *Dimostrare che uno spazio topologico X è T_2 se e solo se ogni rete convergente in X ha un unico punto limite.*

Esercizio 2.47 *Se $f, g : X \to Y$ sono continue e Y è T_2, allora f e g coincidono qualora coincidano su un sottoinsieme denso di X.*

Esercizio 2.48 *Dare un esempio:*

(a) di uno spazio T_0 che non è T_1;

(b) di uno spazio T_1 che non è T_2.

Suggerimento. Per il (b) vedi Esempio 2.13.

Esercizio 2.49 *Sia* **C** *una classe di spazi T_0 chiusa per prodotti e passaggio a sottospazi. Allora* **C** *coincide con la classe di tutti gli spazi T_0 qualora* **C** *contenga almeno uno spazio che non è T_1.*

Esercizio 2.50 *Dare un esempio di uno spazio T_2 che non è regolare.*

2.6.2 Assiomi di separazione più forti: spazi di Tichonov e spazi normali

Diamo adesso delle forme equivalenti degli assiomi T_3, $T_{3.5}$ e T_4 con intorni chiusi.

Lemma 2.51 *Uno spazio topologico X:*

(1) è regolare se e solo se per ogni punto $x \in X$ e ogni aperto U di X che contiene x esiste un intorno aperto V di x tale che $\overline{V} \subseteq U$;

(2) è completamente regolare se e solo se per ogni punto $x \in X$ e ogni aperto U di X che contiene x esiste una funzione continua $f : X \to [0,1]$ tale che $f(x) = 1$ e $f(X \setminus U) = 0$;

(3) è normale se e solo se per ogni chiuso $F \subseteq X$ e ogni aperto U di X che contiene F esiste un aperto V di X tale che $F \subseteq V$ e $\overline{V} \subseteq U$.

Notare che in (1)-(3) basta prendere l'aperto U di una prebase di X.

Dimostrazione. Per esercizio. ♣

Lemma 2.52 *Ogni spazio metrico è T_4.*

Dimostrazione. Siano F e G due sottoinsiemi chiusi disgiunti di X. Poniamo $U = \{x \in X : d(x,F) < d(x,G)\}$ e $V = \{x \in X : d(x,G) < d(x,F)\}$. Ovviamente U e V sono aperti disgiunti e dall' Es. **??** risulta $F \subseteq U$ e $G \subseteq V$. ♣

Esercizio 2.53 *Dimostrare che*

(a) prodotti e sottospazi di spazi T_3 (rispettivamente, $T_{3.5}$) sono spazi T_3(rispettivamente, $T_{3.5}$);

(b) sottospazi chiusi di spazi normali sono normali.

Teorema 2.54 (Tichonov) *Sia X uno spazio topologico $T_{3,5}$ avente una base di cardinalità γ. Allora X è omeomorfo ad un sottospazio del prodotto $[0,1]^\gamma$.*

In onore di Tichonov i prodotti $[0,1]^\alpha$ si chiamano *cubi di Tichonov*, mentre $[0,1]^{\mathbb{N}}$ si dice *cubo di Hilbert.*

Lemma 2.55 *Dimostrare che il cubo di Hilbert $[0,1]^{\mathbb{N}}$ è metrizzabile.*

Dimostrazione. Si deduce dall'es 2.41, (d).♣

Ora vediamo che l'assioma T_4 implica $T_{3.5}$.

Teorema 2.56 (Lemma di Urysohn) *Sia X uno spazio normale. Allora per ogni coppia di insiemi chiusi disgiunti F e G di X esiste una funzione continua $f : X \to [0,1]$ tale che $f(F) = 1$ e $f(G) = 0$.*

Il seguente teorema di Tietze si deduce dal lemma di Urysohn (cf. [E]).

Teorema 2.57 *Sia X uno spazio normale e A un sottospazio chiuso di X. Allora ogni funzione continua $f : A \to \mathbb{R}$ si estende ad una funzione continua $\overline{f} : X \to \mathbb{R}$.*

Lemma 2.58 *Uno spazio topologico X è normale se e solo se per ogni sottoinsieme chiuso F di X e per ogni sottoinsieme aperto W di X che contiene F esiste una successione $W_1, \dots, W_n, \dots$ di insiemi aperti di X tali che $F \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty W_n$ e $\overline{W_n} \subseteq W$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Se X è T_4 esiste un aperto W_1 che contiene F e $\overline{W_1} \subseteq W$. Quindi la successione costante $W_n = W_1$ va bene.

Supponiamo adesso che X soddisfi la condizione nell'ipotesi e siano A e B due chiusi disgiunti di X. Con $F := A$ e $W := X \setminus B$ abbiamo una successione $W_1, \dots, W_n, \dots$ di insiemi aperti di X tali che $A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty W_n$ e $\overline{W_n} \cap B = \emptyset$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Scambiando i ruoli di A e B, con $F := B$ e $W := X \setminus A$ abbiamo una successione $V_1, \dots, V_n, \dots$ di insiemi aperti di X tali che $B \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty V_n$ e $\overline{V_n} \cap A = \emptyset$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Siano adesso

$$O_i := W_i \setminus \bigcup_{k=i} \overline{V}_k \quad \text{e} \quad U_i := V_i \setminus \bigcup_{k=i} \overline{W}_k \tag{3}$$

Allora O_i e U_i sono aperti e $A \subseteq O := \bigcup_{n=1}^\infty O_n$ e $B \subseteq U := \bigcup_{n=1}^\infty U_n$. Dalla (3) segue che U e O sono disgiunti. ♣

Teorema 2.59 *Ogni spazio topologico di Lindelöff regolare è normale.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio regolare di Lindelöff. Per verificare che X è normale applicare il lemma precedente. ♣

Teorema 2.60 *Uno spazio topologico regolare è normale nei seguenti due casi:*

- *X ha base numerabile;*
- *X è numerabile.*

È vero infatti il seguente teorema più forte:

Teorema 2.61 (Urysohn) *Ogni spazio T_3 a base numerabile è metrizzabile.*

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema segue facilmente dal lemma precedente e dal Teorema di Tichonov . ♣

Esercizio 2.62 *Se X è uno spazio normale e separabile, allora per ogni sottoinsieme chiuso e discreto D di X si ha $2^{|D|} = \mathbf{c}$. Di conseguenza, uno spazio separabile con un sottoinsieme chiuso e discreto di cardinalità $\mathbf{c}$ non può essere normale.*

Suggerimento. Generalizzare il ragionamento fatto nell' esercizio precedente .

Esercizio 2.63 (la retta di Sorgenfrey) *Sia τ la topologia su $\mathbb{R}$ che ha come base di intorni di $x \in \mathbb{R}$ gli intervalli $[x, x+\varepsilon)$ al variare di $\varepsilon > 0$. Dimostrare che lo spazio $X = (\mathbb{R}, \tau)$ è normale, ma il prodotto $X \times X$ non è normale.*

Esercizio 2.64 *(a) Dimostrare che T_4 non si preserva per passaggio a prodotti e per sottospazi.*
(b) Dare un esempio di uno spazio $T_{3.5}$ che non sia normale.
(c) Dimostrare che la retta di Sorgenfrey dell' esercizio 2.63 non è metrizzabile e non ha base numerabile.

2.7 Spazi topologici compatti

Uno spazio topologico X è *compatto* se ogni ricoprimento aperto di X ammette un sottoricoprimento finito.

Si dice che una famiglia di insiemi $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ha *la proprietà dell'intersezione finita* se tutte le intersezioni finite $F_{\alpha_1} \cap \ldots \cap F_{\alpha_n}$ di elementi di questa famiglia sono non vuote.

Esercizio 2.65 *Dimostrare che uno spazio topologico è compatto se e solo se per ogni famiglia di insiemi chiusi $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}$ con la proprietà dell'intersezione finita anche l'intersezione $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$ di tutta la famiglia è non vuota.*

Dimostrazione. Si dimostra passando ai complementi. ♣

Avremo spesso bisogno della seguente proprietà dei spazi topologici compatti.

Esercizio 2.66 *Sia X uno spazio compatto, sia U un insieme aperto di X e sia $\mathcal{F}$ una famiglia di insiemi chiusi di X con la proprietà dell'intersezione finita. Se $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \subseteq U$, allora esistono $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$ tali che anche $\bigcap_{k=1}^n F_k \subseteq U$.*

Teorema 2.67 *Dimostrare che per uno spazio topologico le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *X è compatto;*
2. *ogni filtro di X ha un punto di accumulazione;*
3. *ogni ultrafiltro di X è convergente.*

Dimostrazione. Ogni filtro $\mathcal{F}$ su X con ad $\mathcal{F} = \emptyset$ definisce un ricoprimento aperto di X: quello costituito dai complementi delle chiusure degli $F \in \mathcal{F}$); tale ricoprimento non ha sottoricoprimenti finiti. ♣

Esercizio 2.68 *Sia X uno spazio topologico compatto e sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua suriettiva. Allora anche lo spazio Y è compatto.*

Esercizio 2.69 *Dimostrare che un sottospazio chiuso di uno spazio compatto è compatto.*

Esercizio 2.70 *Sia X uno spazio compatto di Hausdorff. Dimostrare che un sottospazio compatto di X deve essere chiuso.*

Teorema 2.71 *Sia X uno spazio compatto e sia $f : X \to Y$ un' applicazione continua e biettiva su uno spazio di Hausdorff Y. Dimostrare che f è chiusa e quindi è un omeomorfismo.*

Dimostrazione. Applicare l' esercizio 2.69 e l'esercizio precedendte. ♣

La compattezza "migliora" le proprietà di separazione dello spazio nel senso seguente:

Lemma 2.72 *Ogni spazio compatto e T_2 è normale.*

Dimostrazione. Prima vediamo che ogni spazio compatto e T_2 è regolare. Sia X uno spazio compatto e T_2, $x \in X$ e sia F un chiuso in X con $x \notin F$. Allora per ogni $y \in F$ abbiamo $x \neq y$ e quindi esistono intorni aperti disgiunti U_y e V_y di x e y rispettivamente. Poiché F è compatto per l' esercizio 2.69, esistono $y_1, \dots, y_n \in F$ tali che l'insieme aperto $V = \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$ contiene Y. Allora $U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$ è un intorno aperto di x tale che $U \cap V = \emptyset$.

Ora sia X uno spazio compatto e T_2 e siano $F, G \subseteq X$ due chiusi disgiunti. Applicando l'argomento precedente possiamo assumere che X sia regolare, quindi per ogni $x \in G$ si possono trovare intorni disgiunti di G e x. Si conclude come nella dimostrazione precedente. ♣

Uno spazio X è *localmente compatto* se per ogni $x \in X$ esiste un intorno U del punto x tale che $\overline{U}$ è compatto.

Lemma 2.73 *Ogni spazio localmente compatto e T_2 è completamente regolare.*

Dimostrazione. Sia $x \in X$ e si scelga un intorno aperto U di x tale che $\overline{U}$ è compatto. Allora $\overline{U}$ è completamente regolare. Se F è un chiuso in X con $x \in X$, allora esiste un intorno aperto V di x tale che $\overline{V} \subseteq U$ e $V \cap F = \emptyset$. Poiché $\overline{U}$ è regolare possiamo trovare una funzione continua $f : \overline{U} \to [0,1]$ con $f(\overline{U} \setminus V) = 0$ e $f(x) = 1$. Adesso estendiamo f a tutto lo spazio X ponendo $f(z) = 0$ per ogni $z \in X \setminus \overline{U}$. La funzione f resta continua e ovviamente $f(F) = 0$. ♣

Il seguente teorema è uno dei più importanti della topologia. La sua dimostrazione è basata sull'assioma della scelta (ed è in effetti equivalente ad esso).

Teorema 2.74 (Tichonov) *Sia $\{X_i\}_{i \in I}$ una famiglia di spazi topologici. Allora anche lo spazio prodotto $\prod_{i \in I} X_i$ è compatto se e solo se ciascuno degli X_i è compatto.*

Come conseguenza del teorema di Tichonov, saremo in grado di determinare quali sono i sottospazi degli spazi compatti di Hausdorff caratterizzando gli spazi topologici che ammettono un omeomorfismo con un sottospazio di uno spazio compatto di Hausdorff. Ovviamente, per prima cosa occorre trovare qualche proprietà necessaria per tali spazi. Siccome gli spazi compatti di Hausdorff sono anche normali (2.72), ci si potrebbe chiedere se questi spazi non sono normali, ma abbiamo già visto che la normalità non è ereditaria. La proprietà di essere di Tichonov è invece ereditaria (cf. 2.44), quindi i nostri spazi devono necessariamente essere spazi di Tichonov. Quello che è sorprendente e bello è che questa semplice proprietà basta:

Teorema 2.75 *Ogni spazio di Tichonov è sottospazio di qualche spazio compatto di Hausdorff.*

Un intero ramo della topologia studia *le compattificazioni* degli spazi di Tichonov, ossia le estensioni compatte di Hausdorff Y di uno dato spazio di Hausdorff X tali che X sia denso in Y.

3 Che cosa è un gruppo topologico

Cominciamo che il concetto fondamentale:

Definizione 3.1 Sia G un gruppo.

- Una topologia τ su G si dice **topologia gruppale** se l'applicazione $f : G \times G \to G$ definita con $f(x, y) = xy^{-1}$ è continua.
- Un **gruppo topologico** è una coppia (G, τ) di un gruppo G ed una topologia gruppale τ su G.

Se τ è di Hausdorff (compatta, localmente compatta, connessa, ecc.), allora il gruppo topologico (G, τ) sarà chiamato di Hausdorff (risp. compatto, localmente compatto, connesso etc.). Analogamente, se G è ciclico (risp. abeliano, nilpotente ecc.) allora il gruppo topologico (G, τ) sarà chiamato ciclico (risp. abeliano, nilpotente ecc.). Si vede facilmente, che τ è una topologia gruppale se e solo se sono continue le applicazioni $\mu : G \times G \to G$ e $\iota : G \to G$ definite con $\mu(x, y) = xy$ e $\iota(x) = x^{-1}$ quando $G \times G$ è munito della topologia prodotto.

Vediamo adesso alcuni esempi, cominciando da quelli banali: per ogni gruppo G la topologia discreta e la topologia indiscreta su G sono topologie gruppali. Esempi non banali di gruppi topologici sono il gruppo moltiplicativo $\mathbb{S}$ dei numeri complessi z con $|z| = 1$ ed il gruppo additivo $\mathbb{R}$, entrambi muniti della loro topologia usuale. Questo si estende anche a tutte le potenze $\mathbb{R}^n$. Questi sono gruppi topologici abeliani. Per ogni n il gruppo lineare $GL_n(\mathbb{R})$ munito della la topologia indotta da $\mathbb{R}^{n^2}$ è un gruppo topologico non abeliano. I gruppi $\mathbb{R}^n$ e $GL_n(\mathbb{R})$ sono localmente compatti, mentre $\mathbb{S}$ è compatto. Altri esempi verrano nel §3.3.

Ricordiamo le seguenti definizioni:

Definizione 3.2 Per un' applicazione $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ tra spazi topologici ed un punto $x \in X$ si dice che:

- f è **continua** in x se per ogni intorno U di $f(x)$ in Y esiste un intorno V di x in X tale che $f(V) \subseteq U$ (oppure, in termini di reti, se per ogni rete convergente $x_\alpha \to x$ in X si ha $f(x_\alpha) \to f(x)$ in Y),
- f è **aperta** in $x \in X$ se per ogni intorno V di x in X esiste un intorno U di $f(x)$ in Y tale che $f(V) \supseteq U$,
- f è continua (aperta) se f è continua (rispettivamente, aperta) in ogni punto $x \in X$.

3.1 Gli intorni dell'elemento neutro

Se G è un gruppo topologico e $a \in G$, allora le **traslazioni** $x \mapsto ax$ e $x \mapsto xa$ nonchè **l'automorfismo interno** $x \mapsto axa^{-1}$ sono omeomorfismi. È importante notare che di conseguenza il gruppo G è discreto se e solo se il punto 1 è isolato, cioè $\{1\}$ è aperto. Nel seguito denotiamo con aM l'imagine di un insieme $M \subseteq G$ sotto la traslazione $x \mapsto ax$, cioè $aM := \{am : m \in M\}$. Adoperiamo questa notazione anche per famiglie di insiemi in G, in particolare, per un filtro $\mathcal{F}$ si denota con $a\mathcal{F}$ il filtro $\{aF : F \in \mathcal{F}\}$.

Adesso facendo uso degli omeomorfismi $x \mapsto ax$ si dimostra la parte (a) del seguente:

Esercizio 3.3 *Sia $f : G \to H$ un omomorfismo tra gruppi topologici. Dimostrare che f è continuo (aperto) se e solo se f è continuo (rispettivamente, aperto) in $1 \in G$.*

Diventa chiaro che in un gruppo topologico G il filtro $\mathcal{V}_G(1)$ di tutti gli intorni dell'elemento neutro 1 di G avrà un ruolo centrale. E utile notare che per ogni $a \in G$ il filtro $\mathcal{V}_G(a)$ di tutti gli intorni dell'elemento a in G coincide con $a\mathcal{V}_G(1) = \mathcal{V}_G(1)a$. Più precisamente, abbiamo il seguente teorema:

Teorema 3.4 *Sia G un gruppo e sia $\mathcal{V}(1)$ il filtro di tutti gli intorni dell'elemento neutro 1 di G per qualche topologia gruppale τ su G. Allora:*

(a) *per ogni $U \in \mathcal{V}(1)$ esiste $V \in \mathcal{V}(1)$ con $V \cdot V \subseteq U$;*

(b) *per ogni $U \in \mathcal{V}(1)$ esiste $V \in \mathcal{V}(1)$ con $V^{-1} \subseteq U$;*

(c) *per ogni $U \in \mathcal{V}(1)$ ed ogni $a \in G$ esiste $V \in \mathcal{V}(1)$ con $aVa^{-1} \subseteq U$.*

Viceversa, se $\mathcal{V}$ è un filtro di G che soddisfa le condizioni (a), (b) e (c) allora esiste un'unica topologia gruppale τ su G tale che $\mathcal{V}$ coincida con il filtro di tutti gli τ-intorni dell'elemento neutro 1 in G.

Dimostrazione. Per dimostrare (a) basta applicare la definizione di continuità della moltiplicazione $\mu : G \times G \to G$ al punto $(1, 1) \in G \times G$. Lo stesso per (b) (adesso si considera l'applicazione "inverso" $\iota : G \to G$ ed il punto $1 \in G$). Per il (c) si considera l'automorfismo interno $x \mapsto axa^{-1}$ al punto $1 \in G$.

Sia $\mathcal{V}$ è un filtro di G che soddisfa le condizioni (a), (b) e (c). Vediamo prima che ogni $U \in \mathcal{V}$ contiene 1. Infatti, scegliamo $W \in \mathcal{V}$ con $W \cdot W \subseteq U$ e scegliamo $V \in \mathcal{V}(1)$ con $V \subseteq W$ e $V^{-1} \subseteq W$. Allora $1 \in V \cdot V^{-1} \subseteq U$.

Adesso definiamo una topologia τ su G per la quale gli aperti O sono definiti con la seguente proprietà:

$$\tau := \{O \subseteq G : (\forall a \in O)(\exists U \in \mathcal{V}) \text{ tale che } aU \subseteq O\}.$$

Si vede facilmente che τ è una topologia su G. Vediamo che per ogni $g \in G$ il filtro $g\mathcal{V}$ coincide con il filtro $\mathcal{V}_{(G,\tau)}(g)$ di tutti gli τ-intorni dell'elemento g in (G, τ). L'inclusione $g\mathcal{V} \supseteq \mathcal{V}_{(G,\tau)}(g)$ è ovvia. Sia adesso $U \in \mathcal{V}$. Per vedere che $gU \in \mathcal{V}(g)$ bisogna trovare un τ-aperto $O \subseteq gU$ che contiene g. Poniamo $O := \{h \in gU : (\exists W \in \mathcal{V})hW \subseteq gU\}$. Ovviamente $g \in O$. Per vedere che $O \in \tau$ scegliamo $x \in O$. Allora esiste $W \in \mathcal{V}$ con $xW \subseteq gU$. Sia $V \in \mathcal{V}$ con $V \cdot V \subseteq W$, allora $xV \subseteq O$ poichè $xvV \subseteq gU$ per ogni $v \in V$.

Dopo aver dimostrato che τ è una topologia per la quale gli τ-intorni dei punti $x \in G$ sono dati dai filtri $x\mathcal{V}$ ci resta verificare che τ è anche gruppale. Basta verificare che la funzione $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ è continua. A questo scopo scegliamo un $U \in \mathcal{V}$ e per (c) possiamo trovare $W \in \mathcal{V}$ con $Wy^{-1} \subseteq y^{-1}U$. Ora scegliamo $V \in \mathcal{V}$ con $V \cdot V^{-1} \subseteq W$. Allora $O = xV \times yV$ è un intorno di (x, y) in $G \times G$ e $f(O) \subseteq xV \cdot V^{-1}y^{-1} \subseteq xWy^{-1} \subseteq xy^{-1}U$. ♣

Nel teorema precedente si può prendere invece di un filtro $\mathcal{V}$ anche una **base di filtro** (cioè, una famiglia $\mathcal{V}$ con la proprietà $(\forall U \in \mathcal{V})(\forall V \in \mathcal{V})(\exists W \in \mathcal{V})W \subseteq U \cap V$) con le proprietà (a)-(c).

Un intorno $U \in \mathcal{V}(1)$ è detto **simmetrico**, se $U = U^{-1}$. Ovviamente, per ogni $U \in \mathcal{V}(1)$ l'intersezione $U \cap U^{-1} \in \mathcal{V}(1)$ è un intorno simmetrico, quindi ogni intorno di 1 contiene un intorno simmetrico.

3.2 Sottogruppi

Sia G un gruppo topologico e sia H un sottogruppo di G. Allora H è un gruppo topologico rispetto alla topologia indotta.

Siano G e H gruppi topologici e sia $f : G \to H$ un omomorfismo continuo. Se f è simultaneamente un isomorfismo e un omeomorfismo, allora f è chiamato un **isomorfismo topologico**. Se $f : G \to f(G) \subseteq H$ è un isomorfismo topologico, dove $f(G)$ è considerato con la topologia indotta da H, allora f è chiamato **immersione di gruppi topologici**, o brevemente **immersione**.

Proposizione 3.5 *Sia G un gruppo topologico e sia H un sottogruppo di G. Allora:*

(a) *H è aperto in G se e solo se H ha interiore non vuoto;*

(b) *se H è aperto, allora H è anche chiuso;*

(c) *se H è discreto e G è T_1, allora H è anche chiuso.*

Dimostrazione. (a) Sia $\emptyset \neq V \subseteq H$ un insieme aperto e sia $h_0 \in V$. Allora $1 \in h_0^{-1}V \subseteq H = h_0^{-1}H$. Ora $U = h_0^{-1}V$ è aperto, contiene 1 e per ogni $h \in H$ sia ha $h \in hU \subseteq H$. Quindi H è aperto.

(b) Se H è aperto allora ogni laterale gH è aperto e quindi il complemento $G \setminus H$ è aperto, e di conseguenza H è chiuso.

(c) Poichè H è discreto esiste $U \in \mathcal{V}(1)$ con $U \cap H = \{1\}$. Scegliamo $V \in \mathcal{V}(1)$ con $V^{-1} \cdot V \subseteq U$. Allora per ogni $x \in G$ è $|xV \cap H| \leq 1$, poichè $h_1 = xv_1 \in xV \cap H$ e $h_2 = xv_2 \in xV \cap H$ ci dà anche $h_1^{-1}h_2 \in V^{-1} \cdot V \cap H = \{1\}$, quindi $h_1 = h_2$. Perciò, se $x \notin H$ troveremo un intorno $W \subseteq xV$ di x con $W \cap H = \emptyset$, cioè, $x \notin \overline{H}$. ♣

Esercizio 3.6 *Sia G un gruppo. Allora ogni topologia gruppale τ del suo centro $Z(G)$ si estende in modo unico ad una topologia gruppale τ' su G per la quale $Z(G)$ risulta un sottogruppo aperto. Di conseguenza, τ' è discreta se e solo se τ è discreta.*

Esercizio 3.7 *Dimostrare che l'omomorfismo $\mathbb{Z}(3^\infty) \to \mathbb{Z}(3^\infty)$ moltiplicazione per 2 non è un omomorfismo aperto, quando il gruppo $\mathbb{Z}(3^\infty)$ si considera con la topologia indotta dal gruppo $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.*

3.3 Esempi

Il Teorema 3.4 permette di introdurre più facilmente una topologia gruppale tramite una base di filtro soddisfacente (a)-(c).

3.3.1 Topologie lineari

Sia $\mathcal{V} = \{N_i : i \in I\}$ una base di filtro formata di sottogruppi normali di un gruppo G. Allora $\mathcal{V}$ soddisfa (a)-(c) e quindi genera una topologia gruppale su G per la quale gli intorni di un punto $g \in G$ hanno come base la famiglia dei laterali $\{gN_i : i \in I\}$. Topologie gruppali di questo tipo si chiamano **topologie lineari**. Vediamo adesso diversi esempi di topologie lineari.

Esempio 3.8 Sia G un gruppo e sia p un numero primo p:

- la topologia **pro-finita** – $\{N_i : i \in I\}$ sono tutti i sottogruppi normali di indice finito;
- la topologia **p-adica** – $I = \mathbb{N}$ e per $n \in \mathbb{N}$, N_n è il sottogruppo (necessariamente normale) di G generato da tutte le potenze $\{g^{p^n} : g \in G\}$.
- la topologia **naturale** – $I = \mathbb{N}$ e per $n \in \mathbb{N}$, N_n è il sottogruppo (necessariamente normale) di G generato da tutte le potenze $\{g^n : g \in G\}$.
- la topologia **pro-p-finita** – $\{N_i : i \in I\}$ sono i sottogruppi normali di indice finito potenza di p;
- la topologia **pro-numerabile** – $\{N_i : i \in I\}$ sono i sottogruppi normali di indice $[G : N_i]$ al più numerabile.

La seguente costruzione semplice appartiene a Taimanov [T]. Adesso intorni di 1 sono sottogruppi, non necessariamente normali.

Esercizio 3.9 *Sia G un gruppo con centro triviale. Allora, facendo uso degli automorfismi interni, possiamo considerare G come un sottogruppo di Aut (G). Si munisca Aut (G) con la topologia gruppale indotta dal filtro $\{c_G(F)\}$[1], dove F percorre la famiglia di tutti sottoinsiemi finiti di G. Dimostrare che questa topologia:*

- *è di Hausdorff*
- *è discreta se e solo se esiste un sottoinsieme finito di G con centralizzante triviale.*

[1] per $F \subseteq G$ denotiamo con $c_G(F)$ il **centralizzante** di F – il sottogruppo $\{x \in G : xy = yx \text{ per ogni } y \in F\}$.

3.3.2 Topologie generate da caratteri

Sia G un gruppo abeliano topologico. Si dice **carattere** di G ogni omomorfismo continuo $\chi : G \to \mathbb{S}$. Se G non ha una topologia, sarà considerato con la topologia discreta, quindi i caratteri in questo caso sono *tutti* omomorfismi $\chi : G \to \mathbb{S}$. Per caratteri χ_i, $i = 1, \dots, n$, di G e $\delta > 0$ poniamo

$$U(\chi_1, \dots, \chi_n; \delta) := \{x \in G : |\text{Arg }(\chi_i(x))| < \delta, i = 1, \dots, n\}, \tag{1}$$

dove per un numero complesso z si definisce Arg $(z) = x$ se $z = exp(i2\pi x)$ con $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Chiaramente, l'insieme (1) è sempre aperto in G.

Esercizio 3.10 *Sia G un gruppo abeliano e sia H una famiglia di caratteri di G. Allora la famiglia*

$$\{U(\chi_1, \dots, \chi_n; \delta) : \delta > 0, \chi_i \in H \forall i = 1, \dots, n\}$$

è una base di filtro che soddisfa le condizioni (a)-(c) del Teorema 3.4, quindi induce una topologia gruppale $\mathcal{T}_H$ (che è la topologia iniziale della famiglia H, ovvero la minima topologia che rende tutti i caratteri di H continui).

Ci riferiamo alla topologia gruppale $\mathcal{T}_H$ come **topologia generata dai caratteri** di H.
Nel caso di un gruppo abeliano G una parte delle topologie lineari su G risultano essere anche generate da caratteri.

Esercizio 3.11 *Sia G un gruppo abeliano.*

1. *Sia H la famiglia dei caratteri χ di G per i quali il sottogruppo $\chi(G)$ è finito. Dimostrare che la topologia $\mathcal{T}_H$ concide con la topologia pro-finita su G.*

2. *Sia H la famiglia dei caratteri χ di G per i quali il sottogruppo $\chi(G)$ è finito ed è contenuto nel sottogruppo $\mathbb{Z}(p^\infty)$ di $\mathbb{T}$. Dimostrare che la topologia $\mathcal{T}_H$ concide con la topologia pro-p-finita su G.*

Questo esercizio ci suggerisce di chiamare un carattere $\chi : G \to \mathbb{T}$ *periodico* se esiste $n > 0$ tale che χ si annulla sul sottogruppo $nG := \{nx : x \in G\}$. (In termini equivalenti, il carattere $n \cdot \chi$ è il carattere nullo, dove il carattere $n \cdot \chi : G \to \mathbb{T}$ viene definito con $(n \cdot \chi)(x) := n\chi(x)$.)

Esercizio 3.12 *Sia G un gruppo abeliano e sia H una famiglia di caratteri di G. Dimostrare che la topologia $\mathcal{T}_H$ è contenuta nella topologia pro-finita su G se e solo se ogni carattere di H è periodico.*

3.3.3 L'assioma (c)

Qui discutiamo berevemente l'assioma (c). Se G è abeliano, allora l'assioma (c) è triviale e non è necessaria. Altrimenti, si può anche vedere come l'analogo della legge di scambiare l'ordine nella moltiplicazione in un gruppo non abeliano: per $a, b \in G$ sia ha $ab = ba^b$, dove $a^b = b^{-1}ab$, cioè l'ordine si può scambiare a "meno di coniugio". Ponendo $U^a := a^{-1}Ua$ si ha $Ua = aU^a$. L'assioma (c) ci garantisce che $U^a \in \mathcal{V}(1)$. Al livelo del filtro $\mathcal{V}(1)$ questa "rettifica" sparisce: $a\mathcal{V}(1) = \mathcal{V}(1)a$ per ogni $a \in G$, cioè $\mathcal{V}(1)^a = \mathcal{V}(1)$. In termini equvalenti, il filtro $\mathcal{V}(1)$ è invariante per tutti gli automorfismi interni.

Adesso studieremo l'invarianza, in questo senso, rispetto ad un *insieme* di automorifsmi interni.

Esercizio 3.13 *Sia $U \in \mathcal{V}(1)$ e sia M un insieme in un gruppo topologico G. Allora le seguenti proprietà sono equivalenti:*
(a) esise un intorno $V \in \mathcal{V}$ tale che $aVa^{-1} \subseteq U$ vale per tutti $a \in M$
(b) $\bigcap_{a \in M} a^{-1}Ua \in \mathcal{V}(1)$.

Definizione 3.14 Sia G un gruppo topologico e sia $M \subseteq G$.

- M è **U-sottile** per qualche $U \in \mathcal{V}_G(1)$ se M soddisfa le condizioni equivalenti dell'esercizo precedente.
- M è **sottile** se M è U-sottile per ogni $U \in \mathcal{V}(1)$.

Si noti che un insieme M è sottile se per ogni $U \in \mathcal{V}(1)$ esiste un intorno $V \in \mathcal{V}$ tale che $aVa^{-1} \subseteq U$ vale per tutti $a \in M$. L'assioma (c) ci dice che ogni insieme del tipo $M = \{a\}$ è sottile.

Ora vediamo che gli insiemi sottili (rispettivamente U-sottili, per un U fisso) formano un ideale dell'algebra Booleana $P(G)$ invariante per traslazioni destre.

Esercizio 3.15 (a) *Se M_1 e M_2 sono insiemi sottili (risp., U-sottili), anche $M_1 \cup M_2$ è sottile (risp., U-sottile).*

(b) *ogni insieme finito è sottile,*

(c) *se M è un insieme sottile (risp., U-sottile), allora:*

(c_1) *ogni $N \subseteq M$ è sottile (risp., U-sottile);*

(c_2) *per ogni $a \in G$ anche Ma è sottile (risp., U-sottile);*

(c_3) *per ogni $a \in G$ l'insieme aM è sottile (risp., $U^{b^{-1}}$-sottile);*

(c'_3) *per ogni $a \in G$ l'insieme M^a è sottile (risp., U^b-sottile).*

Ora facciamo variare U, lasciando fisso M.

Esercizio 3.16 *Sia un gruppo topologico G è M un sottoinsieme di G.*

(a) *se $V \subseteq U$ appartengono a $\mathcal{V}(1)$ e M è V-sottile, allora M è anche U-sottile,*

(b) *se V, U appartengono a $\mathcal{V}(1)$ e M è V-sottile e U-sottile, allora M è anche $V \cap U$-sottile.*

Lemma 3.17 *Per ogni $U \in \mathcal{V}(1)$ e per ogni $a \in G$ esiste un intorno U-sottile di a.*

Dimostrazione. Per (c_2) dell'esercizio precedente basta trovare un $O \in \mathcal{V}(1)$ che sia U-sottile. Segliamo $V \in \mathcal{V}(1)$ simmetrico con $V^3 \subseteq W$. Questo implica che $\bigcap_{v \in V} vUv^{-1}$ è un intorno di 1 (perchè contiene e V). Quindi V è un intorno U-sottile di 1. ♣

Vedremo nel seguito che ogni insieme compatto è sottile (cf. 7.1).

Esercizio 3.18 *Sia G un gruppo con topologia lineare. Allora G è sottile.*

4 Assiomi di separazione

4.1 La chiusura in un gruppo topologico

Ora vediamo come si può calcolare la **chiusura** $\overline{H}$ di un sottoinsieme H di un gruppo topologico G. Scriveremo brevemente $\mathcal{V}$ invece di $\mathcal{V}(1)$.

Lemma 4.1 *Sia H un sottoinsieme di G. Allora*

(a) $\overline{H} = \bigcap_{U \in \mathcal{V}} UH = \bigcap_{U \in \mathcal{V}} HU = \bigcap_{U,V \in \mathcal{V}} UHV$;

(b) *se H è un sottogruppo di G, allora $\overline{H}$ è un sottogruppo di G; se H è normale, lo è anche $\overline{H}$;*

(c) $N = \overline{\{1\}}$ *è un sottogruppo normale chiuso.*

Dimostrazione. (a) Per $x \in G$ abbiamo $x \notin \overline{H}$ se e solo se esiste $U \in \mathcal{V}$ tale che $xU \cap H = \emptyset = Ux \cap H$. Scegliamo U simmetrico, i.e., $U = U^{-1}$, allora questo è equivalente a $x \notin UH \cup HU$. Questo dimostra $\overline{H} = \bigcap_{U \in \mathcal{V}} UH = \bigcap_{U \in \mathcal{V}} HU$. Per vedere che vale anche l'ultima uguaglianza in (a) notiamo che dalle uguaglianze già dimostrate segue $\bigcap_{U,V \in \mathcal{V}} UHV = \bigcap_{U \in \mathcal{V}} (\bigcap_{V \in \mathcal{V}} UHV) = \bigcap_{U \in \mathcal{V}} \overline{UH} \subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{V}} U^2H = \bigcap_{W \in \mathcal{V}} WH = \overline{H}$.

(b) Siano $x, y \in \overline{H}$. Secondo (a), per verificare che $xy \in \overline{H}$ basta vedere che $xy \in UHU$ per ogni $U \in \mathcal{V}$. Ora basta osservare che $x, y \in \overline{H}$ ci dà $x \in UH$ e $y \in HU$. Se H è normale, allora per ogni $a \in G$ e per $U \in \mathcal{V}$ esiste un simmetrico $V \in \mathcal{V}$ con $aV \subseteq Ua$ e $Va^{-1} \subseteq a^{-1}U$. Ora per ogni $x \in \overline{H}$ abbiamo $x \in VHV^{-1}$, quindi $axa^{-1} \in aVHV^{-1}a^{-1} \subseteq UaHa^{-1}U \subseteq UHU$. Questo dimostra $axa^{-1} \in \overline{H}$ per il punto (a). ♣

Per due sottoinsiemi A e B di un spazio topologico vale $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Ora vediamo che questa formula si può estendere *parzialmente* anche al prodotto $A \cdot B$ nel caso di gruppi topologici.

Lemma 4.2 *Siano A e B due sottoinsiemi di un gruppo topologico G.*

(a) *Dimostrare che $\overline{A} \cdot \overline{B} \subseteq \overline{A \cdot B}$.*

(b) *Dimostrare che $\overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{A \cdot B}$ se $\overline{B}$ è compatto.*

(c) *Dare esempio di due sottogruppi chiusi A e B tali che $A \cdot B$ non è chiuso.*

Dimostrazione. (a) Se $a \in \overline{A}$ e $b \in \overline{B}$, allora $a = \lim a_\gamma$ e $b = \lim b_\gamma$ con $a_\gamma \in A$, $b_\gamma \in B$. Ora $ab = \lim a_\gamma b_\gamma \in \overline{A \cdot B}$.

(b) Siano $a_\gamma \in A$ e $b_\gamma \in B$ tali che $a_\gamma b_\gamma \to g$ in G. Per la compattezza di $K = \overline{B}$ esiste una sottorete convergente $b_{\gamma_\alpha} \to b \in K$. Allora $a_{\gamma_\alpha} b_{\gamma_\alpha} \to g$ e $b_{\gamma_\alpha}^{-1} \to b^{-1}$. Quindi, si ha $gb^{-1} = \lim a_{\gamma_\alpha} \in \overline{A}$ e $g \in \overline{A} \cdot b \subseteq \overline{A} \cdot K$. L'altra inclusione è stata dimostrata in (a).

(c) Sia $A = \mathbb{Z}$ e B il sottogruppo ciclico di $\mathbb{R}$ generato da $\sqrt{2}$. Allora entrambi A e B sono chiusi, ma il sottogruppo $A + B$ di $\mathbb{R}$ è denso. ♣

Esercizio 4.3 *Siano A e K due sottoinsiemi di un gruppo topologico G di Hausdorff, dei quali A è chiuso e K è compatto. Dimostrare che $A \cdot K$ è chiuso.*

Dimostrazione. Applicare 4.2 (b). ♣

4.2 Le assiomi di separazione

È facile vedere, con il Lemma 4.1, che ogni gruppo topologico è regolare, quindi si ha:

Proposizione 4.4 *Per un gruppo topologico G sono equivalenti:*

(a) *G è di Hausdorff;*

(b) *G è T_0.*

(c) *G è T_3.*

(d) $\overline{\{1\}} = \{1\}$.

Nel seguito tutti gruppi topologici considerati, salvo casi espilicitamente menzionati, saranno di Hausdorff. Vedremo che ogni gruppo topologico T_0 è anche spazio di Tychonov, ma la dimostrazione di questo fatto richiede un approccio più approffondito (cf. 6.10).

Teorema 4.5 * *Il gruppo $\mathbb{Z}^{\aleph_1}$ munito della topologia di Tychonov (dove $\mathbb{Z}$ si considera discreto) non è un gruppo normale (quale spazio topologico).*

Esercizio 4.6 *Sia G un gruppo topologico di Hausdorff. Il centralizzante di un elemento $g \in G$ è un sottogruppo chiuso. In particulare, il centro $Z(G)$ è sempre un sottogruppo chiuso di G.*

Esercizio 4.7 *Sia G un gruppo topologico di Hausdorff, $a \in G$ e $n \in \mathbb{N}$. Allora l'insieme $\{x \in G : x^n = a\}$ è chiuso in G.*

Definizione 4.8 Sia G un gruppo abeliano e sia H una famiglia di caratteri di G. Diremo che i caratteri di H **separano i punti di** G se per ogni $x \in G$, $x \neq 0$, esiste un carattere $\chi \in H$ con $\chi(x) \neq 1$.

Esercizio 4.9 *Sia G un gruppo abeliano e sia H una famiglia di caratteri di G. Dimostrare che la topologia $\mathcal{T}_H$ è di Hausdorff se e solo se i caratteri di H separano i punti di G.*

Proposizione 4.10 *Sia G un gruppo abeliano infinito e sia $H = Hom(G, \mathbb{S})$. Dimostrare che*

(a) *i caratteri di H separano i punti di G,*

(b) *la topologia $\mathcal{T}_H$ è di Hausdorff e non discreta.*

Dimostrazione. (a) Sia $x \in G$, $x \neq 0$. Troviamo un elemento $z \in \mathbb{S}$ con $o(z) = o(x)$ (se l'ordine $o(x)$ è infinito basta prendere qualsiasi elemento z di $\mathbb{S}$ che non sia di torsione, altrimenti, se l'ordine $o(x) = n$ è finito si prende per esempio $z = exp(i2\pi/n)$. Allora $\langle x\rangle \cong \langle z\rangle$, sia $f : \langle x\rangle \to \langle z\rangle$ un isomorfismo. Per la proprietà dei gruppi divisibili, f si estende ad un omomorfismo $\overline{f} : G \to \mathbb{S}$.

Per l'Esercizio 4.9 questo vuol dire che la topologia $\mathcal{T}_H$ è di Hausdorff. Supponiamo, per assurdo, che $\mathcal{T}_H$ sia discreta. Allora esistono $\chi_i \in H, i = 1, \ldots, n$ e $\delta > 0$ tali che $U(\chi_1, \ldots, \chi_n; \delta) = \{0\}$. In particolare, $H = \bigcap_{i=1}^{n} \ker \chi_i = \{0\}$. Quindi l'omomorfismo diagonale $f = \langle \chi_1, \ldots, \chi_n\rangle : G \to \mathbb{S}^n$ è iniettivo e $f(G) \cong G$ è un sottogruppo discreto infinito di $\mathbb{S}^n$. Per la Proposizione 3.5 $f(G)$ è chiuso in $\mathbb{S}^n$ e quindi compatto. Ma gli spazi compatti e discreti sono finiti – assurdo. ♣

Corollario 4.11 *Ogni gruppo abeliano infinito ammette una topologia gruppale di Hausdorff non discreta.*

Corollario 4.12 *Ogni gruppo G con centro infinito ammette una topologia gruppale di Hausdorff non discreta.*

Dimostrazione. Sul centro $Z(G)$ di G esiste una topologia gruppale di Hausdorff non discreta per l'esercizio precedente. Adesso si applica il 3.6 per estendere questa topologia ad una topologia gruppale di Hausdorff non discreta su G. ♣

4.2.1 Il problema di Markov

Nel 1946 A. Markov pose il problema dell'esistenza di un gruppo infinito (numerabile) tale che l'unica topologia gruppale di Hausdorff su questo gruppo sia la topologia discreta. Un gruppo con questa proprietà chiameremo **gruppo di Markov**. Se gruppo di Markov esiste esso deve avere centro finito (cf. 4.12).

Solo nel 1980 Shelah diede un esempio di gruppo di Markov. La sua costruzione sfrutta l'ipotesi del continuo CH. Il gruppo M costruito da Shelah è semplice, non numerabile e non ha sottogruppi massimali[2]. Più tardi, Hesse [1980] provò che CH può essere eliminata dalla costruzione di Shelah.

Ol′shanskii [1980], facendo uso dei gruppi di Adian (see Adian [1980], 13.4), trovò il seguente esempio molto semplice di un gruppo numerabile di Markov. Siano m e n numeri naturali dispari ≥ 665, e sia $A = A(m,n)$ il *gruppo di Adian*. Questo gruppo ha le seguenti properità: (a) è n-generato, (b) è senza torsione, (c) il centro C di A è un gruppo ciclico infinito, (d) per $n > 1, A/C$ è un gruppo infinito [3] di esponente m, cioè $y^m \in C$ per ogni y in A. Adesso A è numerabile (per (a)), mentre (b), (c) e (d) implicano che $G = A/C^m$ è un gruppo infinito di Markov, dove C^m indica il sottogruppo $\{c^m : c \in C\}$. Per vederlo osserviamo che per ogni $x \in A\backslash C$ si ha $x^m \in C\backslash C^m$. (Infatti, sia d un generatore di C. Se $x^m = d^{ms}$ avremo $(xd^{-s})^m = 1$ e quindi $xd^{-s} = 1$ e $x \in C$.) Quindi

$$\text{per ogni } u \in G\backslash\{1\} \text{ esiste } a \in C\backslash C^m, a \neq 1, \text{ tale che o } u = a \text{ oppure } u^m = a. \tag{1}$$

Poichè C/C^m ha m elementi, ogni $u \in G\backslash\{1\}$ è soluzione di una delle $2(m-1)$ equazioni in (1). Per ogni topologia gruppale di Hausdorff τ su G l'insieme delle soluzioni del sistema finito (1) è τ-chiuso (cf. 4.7). Pertanto, $G\backslash\{e\}$ è chiuso quindi la topologia τ è discreta.

5 Prodotti, omomorfismi e quozienti

5.1 Isomorfismi che riguardano i quozienti

Considerare un gruppo topologico G e un sottogruppo normale N di G. Allora il gruppo quoziente G/N, è un gruppo topologico rispetto alla **topologia quoziente** di G/N. Poiché abbiamo dei gruppi topologici questa topologia consiste di tutti insiemi $p(U)$, dove U percorre la famiglia di tutti sottoinsiemi aperti di G (poiché $p^{-1}(p(U))$ è aperto in G). Quindi, l'omomorfismo canonico $p : G \to G/N$, definito con $p(x) = xN$ per ogni $x \in G$, è continuo e aperto.

Colleghiamo adesso proprietà della topologia quoziente di G/H con quelle del sottogruppo H di G.

Lemma 5.1 *Sia G un gruppo topologico e sia H un sottogruppo normale di G. Allora*

(a) *G/H è di Hausdorff se e solo se H è chiuso;*

(b) *H è aperto se e solo se lo spazio G/H è discreto.*

Dimostrazione. Ovvio. ♣

Adesso vedremo quali degli isomorfismi noti nel caso discreto rimangono validi per tutti gruppi topologici. Il seguente teorema appartiene a Frobenius.

Teorema 5.2 *Se G e H sono gruppi topologici, $f : G \to H$ è un omomorfismo suriettivo e $p : G \to G/Kerf$ è l'omomorfismo canonico, allora l'unico omomorfismo $g : G/Kerf \to H$, tale che $f = g \circ p$, è un isomorfismo continuo. Se f è aperto, allora g è un isomorfismo topologico.*

Dimostrazione. Segue dalla definizione della topologia quoziente. ♣

Lemma 5.3 *Siano H, G spazi topologici, sia $\varphi : H \to G$ un applicazione continua e aperta, sia P un sottospazio di G e $H_1 = \varphi^{-1}(P)$. Allora la restrizione $\psi : H_1 \to P$ dell'applicazione φ al sottospazio H_1 è aperta.*

Dimostrazione. Per vedere che ψ sia aperta scegliamo un punto $x \in H_1$ ed un intorno U di x in H_1. Allora esiste un intorno W di x in H tale che $U = H_1 \cap W$. Per vedere che $\psi(U)$ sia un intorno di $\psi(x)$ in P basta notare che se per $w \in W$ si ha $\varphi(w) \in P$, allora $w \in H_1$, quindi $w \in H_1 \cap W = U$. Pertanto $\varphi(W) \cap P \subseteq \varphi(U) = \psi(U)$. ♣

Esercizio 5.4 *Sia G un gruppo topologico, sia N un sottogruppo normale chiuso di G e sia $p : G \to G/N$ l'omomorfismo canonico. Allora per ogni sottogruppo H di G/N la restrizione $p' : p^{-1}(H) \to H$ di p è aperta.*

[2] Quindi, dimostra che il sottogruppo di Frattini "non commuta con i prodotti finiti": $Fratt(M) = M$, mentre $Fratt(M \times M) = \Delta_M$ (il sottogruppo diagonale di $M \times M$). Poichè tutti sottogruppi prori di M sono numerabili, questo gruppo fornisce anche un esempio di **gruppo di Jonsson**, definito con la proprietà di essere non numerabile e di avere tutti i sottogruppi propri numerabili.

[3] Questo gruppo risolse il celebre problema di Burnside del 1902: trovare un gruppo infinito finitamente generato e di esponente finito.

Vedremo nel seguito che la restrizione $p' : H_1 \to p(H_1)$ di p su un sottogruppo arbitrario di G può non essere aperta (cf. 5.8).

Il seguente teorema raccoglie alcuni proprietà importanti dei gruppi quozienti.

Teorema 5.5 *Sia G un gruppo topologico, sia N un sottogruppo normale chiuso di G e sia $p : G \to G/N$ l'omomorfismo canonico.*

(a) *Se H è un sottogruppo di G, allora l'omomorfismo $i : HN/N \to p(H)$, definito con $i(xN) = p(x)$, è un isomorfismo topologico.*

(b) *Se H è un sottogruppo normale e chiuso di G con $N \subseteq H$, allora $p(H)$ è un sottogruppo normale e chiuso in G/N e l'applicazione $j : G/H \to (G/N)/(H/N)$, definita da $j(xH) = (xN).(H/N)$, è un isomorfismo topologico.*

(Sia in (a) chè in (b) i gruppi quozienti sono muniti con la topologia quoziente.)

Dimostrazione. (a) Applicare il Teorema 5.2 alla restrizione $p' : HN \to p(H)$ di p, notando che $HN = p^{-1}(p(H))$ e quindi p' è un applicazione aperta per l'esercizio precedente.

(b) Poichè $H = HN$, per il punto (a) la topologia indotta di $p(H)$ coincide con la topologia quoziente di H/N. Questo ci permette di identificare H/N con il sottogruppo topologico $p(H)$ di G/N. Poichè $H = HN$, l'insieme $(G/N) \setminus p(HN) = p(G \setminus HN)$ è aperto, e quindi $p(H)$ è chiuso. Per finire notiamo che la composizione $f : G \to (G/N)/(H/N)$ di p con l'omomorfismo canonico $G/N \to (G/N)/(H/N)$ è aperta, essendo quest'ultimo aperto. Applicando all'omomorfismo aperto f il Teorema 5.2 concludiamo che j è un isomorfismo topologico. ♣

Lemma 5.6 *Se H è un sottogruppo discreto di $\mathbb{R}^n$, allora H è libero e $r(H) \leq n$.*

Dimostrazione. Infatti, sia H un sottogruppo discreto di $\mathbb{R}^n$ e per assurdo sia $r(H) > n$. A meno di sottogruppi si può supporre $r(H) = n + 1$. Non è restritivo inoltre supporre che $H \supseteq \mathbb{Z}^n$ (altrimenti si applica un isomorfismo lineare). Per il Teorema 5.5 l'omomorfismo canonico $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong \mathbb{T}^n$ manda il sottogruppo chiuso H in un sottogruppo chiuso $p(H)$ e quindi compatto di $\mathbb{T}^n$; inoltre $H = p^{-1}(p(H))$, quindi la restrizione di p ad H è aperta e $p(H)$ è discreto. D'altra parte, $p(H) \cong \mathbb{Z}$ è infinito, ma questo è assurdo essendo $p(H)$ compatto e discreto. Dunque deve essere $r(H) \leq n$. Vediamo ora che H è libero. Sia $s = r(H)$; a meno di isomorfismo lineare si può supporre $\mathbb{Z}^s \subseteq H \subseteq \mathbb{R}^s$. L'argomento usato in precedenza ci garantisce che il quoziente $H/\mathbb{Z}^s$ deve essere finito. Allora H è finitamente generato e senza torsione, quindi deve essere libero. ♣

Teorema 5.7 *Sia G un gruppo topologico, sia N un sottogruppo normale chiuso di G. Per un sottogruppo H di G sia $f : H/H \cap N \to HN/N$ l'applicazione definita con $f(x(H \cap N)) = xN$. Allora f è an isomorfismo continuo.*

Dimostrazione. Il fatto che f è un isomorismo di gruppi è ben noto. Per vedere che l'isomorfismo $f : H/H \cap N \to HN/N$ è continuo si applichi il teorema dell'omomorfismo 5.2 all'omomorfismo $\alpha : H \to HN/N$ definito con $\alpha(h) = hN$. ♣

Esercizio 5.8 *Trovare esempi quando l'isomorfismo f nel teorema precedente non è aperto.*

Dimostrazione. Ecco tre esempi.

- 1. Si consideri $G = \mathbb{T}$, $N = \mathbb{Z}_2 \leq \mathbb{T}$, $H = \mathbb{Z}(3^\infty)$ e si applichi l'Es. 3.7.
- 2. $G = \mathbb{R}^2$, $N = \mathbb{Z}^2$ e $H = \langle(1, \sqrt{2})\rangle$. Sia $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ l'omomorfismo canonico. Adesso $H \cap N = \{0\}$ e quindi $H/H \cap N = H$, mentre $p(H) = H + N/N$ con la topologia indotta è un sottogruppo non-discreto in $G/N \cong \mathbb{T}^2$. Infatti, se $p(H)$ fosse discreto, allora per il 3.5 sarebbe anche chiuso e quindi $H + N = p^{-1}(H)$ sarebbe chiuso con $r(H + N) = 3$ – assurdo per il lemma 5.6. Quindi $p(H)$ non è discreto, mentre $H \cong \mathbb{Z}$ lo è. Pertanto H e $p(H)$ non sono omeomorfi e quindi la restrizione $p : H \to p(H)$ non è aperta.
- 3. Oppure, $G = \mathbb{R}^2$, $N = \mathbb{Z}^2$ e H – la retta che passa per il punto $(1, \sqrt{2})$. Adesso $H \cap N = \{0\}$ e quindi $H/H \cap N = H$, mentre $H + N/N$ con la topologia indotta è denso in $G/N \cong \mathbb{T}^2$, quindi non è completo, mentre $H \cong \mathbb{R}$ lo è (cf. 9.5).

♣

5.2 Prodotti, gruppi topologicamente semplici

Sia $\{G_i\}_{i\in I}$ una famiglia di gruppi topologici. È facile vedere che il gruppo $G = \prod_{i\in I} G_i$, considerato con la topologia prodotto (di Tichonov), è un gruppo topologico. Ed è chiaro che per ogni $i \in I$ l'inclusione canonica $G_i \to G$ è una immersione di gruppi topologici mentre la proiezione canonica $p_i : G \to G_i$ è un omomorfismo aperto.

Definizione 5.9 Sia $f_i : H \to G_i$ una famiglia di omomorfismi tra gruppi topologici. L'*omomorfismo diagonale* della famiglia $\{f_i\}_{i\in I}$ è l'unico omomorfismo $f : H \to \prod_{i\in I} G_i$ che soddisfa le eguaglianze $p_i \circ f = f_i$ per ogni $i \in I$.

Esercizio 5.10 *Sia $f_i : H \to G_i$ una famiglia di omomorfismi tra gruppi topologici. Allora l'omomorfismo diagonale f è continuo se e solo se lo sono tutti f_i.*

Ora vediamo che la topologia $\mathcal{T}_H$ indotta da una famiglia di caratteri H si descrive anche tramite la topologia prodotto.

Esercizio 5.11 *Sia G un gruppo abeliano e sia H una famiglia di caratteri di G che separano i punti di G. Dimostrare che l'omomorfismo diagonale $G \to \mathbb{S}^H$ indotto da H è un immersione se G viene munito della topologia $\mathcal{T}_H$.*

I gruppi semplici hanno un ruolo centrale nella teoria dei gruppi. Per questo sarà opportuno considerare la seguente versione topologica della semplicità.

Definizione 5.12
- Diremo che il gruppo topologico di Hausdorff G è topologicamente semplice se esso non ha sottogruppi normali chiusi propri.
- Un gruppo topologico è *monotetico* se contiene un sottogruppo ciclico denso.

Nel caso finito otteniamo il solito concetto di gruppo finito semplice. Vedremo nel capitolo sui gruppi simmetrici infiniti che essi sono topologicamente semplici, ma non semplici.

Ovviamente, ogni gruppo monotetico è abeliano. Come vedremo adesso i gruppi abeliani topologicamente semplici non sono poi così "semplici" come nel caso discreto e sono necessariamente monotetici.

Esercizio 5.13
- *I gruppi abeliani topologicamente semplici infiniti sono monotetici e senza torsione.*
- *Le topologie gruppali su $\mathbb{Z}$ che lo rendono un gruppo topologicamente semplice sono precisamente quelle che non hanno sottogruppi propri aperti.*

Come si vedrà nel capitolo dei gruppi completi, i gruppi monotetici sono completamente determinati dalle topologie gruppali su $\mathbb{Z}$.

Ecco un esempio di gruppo monotetico, un altra una classe esempi di gruppi monotetici daremo nel paragrafo successivo.

Esercizio 5.14 *Sia c_p un generatore del gruppo $\mathbb{Z}_p$ ciclico per ogni numero primo p. Allora $G = \prod_p \mathbb{Z}_p$ è monotetico.*

Dimostrazione. Il sottogruppo ciclico di generato da $c = (c_p)$ è denso in G. Per vederlo si usi il teorema cinese dei resti. ♣

5.3 I sottogruppi chiusi di $\mathbb{R}^n$

Il seguente teorema che diamo senza una dimostrazione detagliata descrive i sottogruppi chiusi di $\mathbb{R}^n$ (cf. [HR, Theorem 9.11]).

Teorema 5.15 *Sia $H \neq 0$ un sottogruppo chiuso di $\mathbb{R}^n$. Allora esistono vettori $v_1, \dots, v_k$ linearmente indipendenti (quindi $k \leq n$), tali che per qualche $0 \leq s \leq k$ H coincide con la somma $V + L$ dove V è il sottospazio lineare generato da $v_1, \dots, v_s$ e $L = \langle v_{s+1}, \dots, v_k \rangle$.*

Dimostrazione. Se H è discreto, allora H è libero e genera un sottospazio vettoriale di dimensione $r(H) \leq n$ per il 5.6, quindi l'asserto è vero con $s = 0$. Se H non è discreto consideriamo il sottoinsieme $M = \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\| = 1 \text{ e } \exists \lambda \in (0,1) \text{ con } \lambda u \in H\}$ della sfera unitaria.

Caso 1. Se $M = \{u_1, \dots, u_n\}$ è finito, allora esiste un indice i tale che $\lambda u_i \in H$ per infiniti $\lambda \in (0,1)$ sufficientemente piccoli. Allora tali elementi $\lambda u_i \in H$ di H generano un sottogruppo denso della retta $L = \mathbb{R}u_i$. Quindi $L \leq H$.

Caso 2. Se M è infinito scegliamo una successsione $u_n \in M$ tale che i rispettivi λ_n, con $\lambda_n u_n \in H$, convergano a 0. (Notiamo che se questo risulta impossibile, allora esiste un $m \in M$, per il quale $\lambda_n u \in H$ per infiniti $\lambda_n \to 0$.) Per la compattezza della sfera esiste un punto di accumulazione u_0 di M e quindi non è restrittivo suppore che $u_n \to u_0$. Sia $\varepsilon > 0$ e sia Δ_ε l'intervallo $(\varepsilon, 2\varepsilon)$. Poiché $\lambda_n \to 0$, esiste n_0 tale che per ogni $n \geq n_0$ esiste un opportuno $k_n \in \mathbb{N}$ con $\lambda'_n = k_n\lambda_n \in \Delta_\varepsilon$. Passando ad una sottosuccessione possiamo supporre che $\lambda'_n \to \lambda \in \overline{\Delta_\varepsilon}$. Quindi $\lambda u_0 \in H$. Ripetendo questo argomento con $\varepsilon/2, \varepsilon/4, \dots$ troviamo $\lambda'_m u_0 \in H$ con $\lambda'_m \to 0$ e $\lambda'_m > 0$. Quindi, la retta $L = \mathbb{R}u_0$ che congiunge 0 con u_0 è contenuta in H.

Sia L' un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ complemento di L. Allora $\mathbb{R}^n = L \times L'$ e la proiezione $\mathbb{R}^n \to L' \cong \mathbb{R}^{n-1}$ manda H in un sottogruppo chiuso di L (cf. 5.5 (b)). Adesso si procede per induzione. ♣

Nel seguito denoteremo con $(x|y)$ il prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$. Ricordiamo che ogni base $v_1, \dots, v_n$ di $\mathbb{R}^n$ ammette una base coniugata $v'_1, \dots, v'_n$ definita con le relazioni $(v_i|v'_j) = \delta_{ij}$. Per un sottogruppo H di $\mathbb{R}^n$ definiamo il *sottogruppo associato* H^* ponendo $H^* := \{u \in \mathbb{R}^n : (\forall x \in H)(x|u) \in \mathbb{Z}\}$.

Esercizio 5.16 *Dimostrare che:*

1. H^* *è un sottogruppo chiuso di* $\mathbb{R}^n$ *e la corrispondenza* $H \mapsto H^*$ *è decrescente;*

2. $(\overline{H})^* = H^*$.

Nel seguito studieremo il sottogruppo associato H^* per sottogruppi chiusi H di $\mathbb{R}^n$. Per il teorema 5.15 esiste una base $v_1, \dots, v_n$ di $\mathbb{R}^n$ e $k \leq n$, tali che per qualche $0 \leq s \leq k$ $H = V \oplus L$ dove V è il sottospazio lineare generato da $v_1, \dots, v_s$ e $L = \langle v_{s+1}, \dots, v_k \rangle$. Sia $v'_1, \dots, v'_n$ la base coniugata di $v_1, \dots, v_n$.

Esercizio 5.17 *Dimostrare che il sottogruppo* H^* *coincide con* $\langle v'_{s+1}, \dots, v'_k \rangle + W$*, dove* W *è il sottospazio lineare generato da* $v'_{k+1}, \dots, v'_n$.

Esercizio 5.18 *Per ogni sottogruppo* H *di* $\mathbb{R}^n$ *si ha* $\overline{H} = (H^*)^*$.

Esercizio 5.19 *Sia* V *un iperpiano in* $\mathbb{R}^n$ *determinato dall'equazione* $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ *dove esiste almeno un coefficiente* $a_i = 1$. *Dimostrare che il sottogruppo* $V + \mathbb{Z}^n$ *di* $\mathbb{R}^n$ *non è denso se e solo se tutti i coefficienti* a_i *sono razionali.*

Il seguente esercizio è caso particolare del noto teorema di Kronecker.

Esercizio 5.20 *Sia* $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ *un vettore tale che* $1, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}$ *siano linearmente indipendenti considerati come elementi dello spazio vettoriale* $\mathbb{R}$ *su* $\mathbb{Q}$. *Dimostrare che il sottogruppo* $\langle v \rangle + \mathbb{Z}^n$ *di* $\mathbb{R}^n$ *è denso.*

Teorema 5.21 $\mathbb{T}^{\mathfrak{c}}$ *è monotetico.*

Dimostrazione. Sia B una base di Hamel di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{Q}$ che contiene 1 e sia $B_0 = B \setminus \{1\}$. Applicando l'esercizio precedente si vede che l'elemento $x = (x_b)_{b \in B_0} \in \mathbb{T}^{B_0}$, definito con $x_b = b + \mathbb{Z} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{T}$, è un generatore del gruppo $\mathbb{T}^{B_0}$. ♣

6 Base, metrizzazione

6.1 Base

Nella parte [I] abbiamo definito base di uno spazio topologico. Ricordiamo qui soltanto la definizione di una base di intorni.

Definizione 6.1 Sia G un gruppo topologico. Una sottofamiglia $\mathcal{B}$ di $\mathcal{V}(1)$ è detta **base** se per ogni $U \in \mathcal{V}(1)$ esiste un $V \in \mathcal{B}$ contenuto in U.

Esercizio 6.2 *Se* G *è un sottogruppo in un gruppo topologico* H *e se* $\mathcal{B}$ *è una base di intorni di 1 in* H *allora una base di intorni di 1 in* G *è data da* $\{U \cap G : U \in \mathcal{B}\}$.

Ora vediamo cosa succede se G è un sottogruppo *denso* di H.

Esercizio 6.3 *Se* G *è un sottogruppo denso di un gruppo topologico* H *e* $\mathcal{B}$ *è una base di intorni di 1 in* G*, allora* $\mathcal{B}^* := \{\overline{U}^H : U \in \mathcal{B}\}$ *è una base di intorni di 1 in* H.

Dimostrazione. Infatti, per la regolarità di H sappiamo già che gli intorni chiusi formano una base in H. Quindi, per un intorno $V \ni 1$ in H possiamo trovare un altro V_0 tale che $\overline{V_0} \subseteq V$. Ora, poichè $G \cap V_0$ è un intorno di 1 in G, esiste $U \in \mathcal{B}$ tale che $U \subseteq G \cap V_0$. Ma anche esiste un intorno aperto W di 1 in H tale che $U = W \cap G$. Ovviamente, possiamo scegliere $W \subseteq V_0$ (altrimenti si prende per $W_0 = W \cap V_0$). Adesso vale $\overline{U}^H = \overline{W}$ poichè G è denso in H e W è aperto in H. Pertanto $\overline{U}^H = \overline{W} \subseteq \overline{V}_0 \subseteq V$ è un intorno di 1 in H. ♣

Esercizio 6.4 *Sia G un sottogruppo denso di H e sia $\mathcal{B}$ è una base di intorni di 1 in H, allora $\{gU : U \in \mathcal{B}, g \in G\}$ è una base della topologia di H.*

Dimostrazione. Sia $x \in H$ e sia $x \in O$ un aperto. Allora esiste $U \in \mathcal{U}$ simmetrico con $xU^2 \subseteq O$. Troviamo un $d \in G \cap xU$. Allora $x \in dU \subseteq O$.♣

Lemma 6.5 *Per un gruppo topologico G si pone $d(G) = \min\{|X| : X$ è denso in $G\}$ e*

$$w(G) = \min\{|\mathcal{B} : \mathcal{B} \text{ è una base di } G\} \text{ e } \chi(G) = \min\{|\mathcal{B} : \mathcal{B} \text{ è una base di intorni di 1 in } G\}.$$

Dimostrare che $w(G) = \chi(G) \cdot d(G)$.

Dimostrazione. La disuguaglianza $w(G) \geq \chi(G) \cdot d(G)$ è ovvia. Per vedere che $w(G) \geq d(G)$ basta scegliere una base $\mathcal{B}$ di cardinalità $w(G)$ e per ogni $U \in \mathcal{B}$ scegliere un punto $d_U \in U$. Ora l'insieme $D = \{d_U : U \in \mathcal{B}\}$ é denso in G e $|D| \leq w(G)$.

La disuguaglianza $w(G) \leq \chi(G) \cdot d(G)$ segue dall'esercizio precedente. ♣

6.2 Invarianti cardinali dei gruppi topologici

Gli *invarianti cardinali* dei gruppi topologici sono dei numeri cardinali, diciamo $\rho(G)$, associati ad ogni gruppo topologico (G, τ) in modo tale che se G é topologicamente isomorfo al gruppo topologico H, allora $\rho(G) = \rho(H)$. Per esempio, la cardinalità $|G|$ é l'invariante cardinale più semplice di un gruppo topologico, cge ovviamente non dipende dalla topologia di G. Altri invarianti cardinali sono il *peso* $w(G)$, il *carattere* $\chi(G)$ e la densità $d(G)$. Oltre l'uguaglianza $w(G) = \chi(G) \cdot d(G)$ provata nel Lemma 6.5, abbiamo le seguenti relazioni:

Lemma 6.6 *Sia G un gruppo topologico T_2. Allora:*
a) $d(G) \leq w(G) \leq 2^{d(G)}$;
b) $|G| \leq 2^{w(G)}$.

Dimostrazione. a) $d(G) \leq w(G)$ é stato già dimostrato nel Lemma 6.5 a). Per provare $w(G) \leq 2^{d(G)}$ notiamo che G é regolare, quindi ogni base $\mathcal{B}$ contiene una base $\mathcal{B}_r$ della stessa cardinalità che consiste di aperti regolari (un insieme aperto U é detto *aperto regolare* se coincide con l'interiore della sua chiusura, insiemi aperti non regolari esistono anche negli spazi regolari, ma in tali spazi ogni punto ha una base di intorni che consiste di aperti regolari). Sia adesso $\mathcal{B}$ una base di G di aperti regolari e sia D un sottogruppo denso di G di cadrinalità $d(G)$. Se $U, V \in \mathcal{B}$, con $U \cap D = V \cap D$, allora $\overline{U} = \overline{U \cap D} = \overline{V \cap D} = \overline{V}$. Essendo U e V aperti regolari, $\overline{U} = \overline{V}$ implica $U = V$. In altre parole, l'applicazione $U \mapsto U \cap D$ da $\mathcal{B}$ all'insieme della parti $P(D)$ é iniettiva. Quindi, $w(G) \leq 2^{d(G)}$.

b) Ad ogni punto $x \in G$ mettiamo in corrispondenza l'insieme $O_x = \{U \in \mathcal{B} : x \in U\}$. Allora l'assioma T_2 garantisce che l'applicazione $x \mapsto O_x$ da G all'insieme della parti $P(\mathcal{B})$ é iniettiva. Quindi, $|G| \leq 2^{w(G)}$. ♣

Lemma 6.7 *Sia H un sottogruppo del gruppo topologico G. Allora:*
a) $w(H) \leq w(G)$ e $\chi(H) \leq \chi(G)$.
b) se H é denso in G allora $w(G) = w(H)$ e $\chi(G) = \chi(H)$.

Dimostrazione. a) Se $\mathcal{B}$ é una base di G, allora $\mathcal{B}_1 = \{U \cap H : U \in \mathcal{B}\}$ é una base di H con $|\mathcal{B}_1| \leq |\mathcal{B}|$. Questo implica $w(H) \leq w(G)$. per $\chi(H) \leq \chi(G)$ si applichi Es. 6.2.

b) Per $\chi(G) = \chi(H)$ si applichi a) e Es. 6.3. L'uguaglianza $w(G) = w(H)$ segue da $\chi(G) = \chi(H)$ e il Lemma 6.5. ♣

Esercizio 6.8 *Sia $\{G_i\}_{i \in I}$ una famiglia di gruppi topologici di peso numerabile. Allora $w(\prod_{i \in I} G_i) = |I| \cdot \aleph_0$. In particolare, per ogni cardinale infinito α si ha $w(\mathbb{T}^\alpha) \leq \alpha$ e $w(\mathbb{R}^\alpha) \leq \alpha$.*

6.3 Pseudonorme e pseudometriche in un gruppo

Markov ha introdotto il concetto di **pseudonorma** in un gruppo come segue : questa è un applicazione $\nu : G \to \mathbb{R}_+$ tale che per ogni $x, y \in G$ si ha:

(1) $\nu(1) = 0$;

(2) $\nu(x^{-1}) = \nu(x)$;

(3) $\nu(xy) \leq \nu(x) + \nu(y)$.

Ogni pseudonorma ν genera una pseudometrica d_ν su G definita con $d_\nu(x,y) := \nu(x^{-1}y)$. Questa pseudometrica è **invariante a sinistra** nel senso che $d_\nu(ax,ay) = d_\nu(x,y)$ per ogni $a,x,y \in G$. Denotiamo con τ_ν la topologia indotta su G da questa pseudometrica. Le norme definite in uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ sono ovviamente pseudonorme (con l'ulteriore proprietà, in notazione additiva, che $\nu(0) = 0$ solo se $x = 0$).

Allo scopo di trovare delle metriche che inducono la topologia di un gruppo topologico (G,τ) serve il seguente lemma che diamo senza dimostrazione (cf. [HR, 8.2], [O]). Diremo che una pseudometrica d su G è **continua** se $d: G \times G \to \mathbb{R}_+$ è continua. E chiaro che questo equivale al fatto che la topologia indotta dalla metrica d è contenuta nella topologia τ (cioè, ogni insieme aperto rispetto alla metrica d è aperto anche nella topologia τ).

Lemma 6.9 *Sia G un gruppo topologico e siano*

$$U_0 \supseteq U_1 \supseteq \ldots \supseteq U_n \supseteq \ldots \tag{2}$$

intorni simmetrici di 1 con $U_n^3 \subseteq U_{n-1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora esiste una pseudometrica continua e invariante a sinistra d su G tale che per ogni n si ha $U_n \subseteq B_{1/n} \subseteq U_{n-1}$.

E facile vedere che nel lemma precedente $H = \bigcap_{n=1}^\infty U_n$ è un sottogruppo di G con la proprietà $H = \{x \in G : d(x,1) = 0\}$. In particolare, d è una metrica se e solo se $H = \{1\}$. Se la catena (2) ha anche le proprietà $xU_nx^{-1} \subseteq U_{n-1}$ per ogni $x \in G$ e per ogni n, il sottogruppo H è normale e d definisce *sempre* una metrica sul gruppo quoziente ponendo $\tilde{d}(xH,yH) := d(x,y)$ (si verifichi che questa definizione non dipende dalla scelta di x,y nei laterli xH, yH). La metrica $\tilde{d}$ induce la topologia quoziente su G/H.

Teorema 6.10 (Birkhoff-Kakutani) *Ogni gruppo topologico T_0 è spazio di Tychonov.*

Dimostrazione. Sia F un insieme chiuso con $1 \notin F$. Allora possiamo trovare una catena (2) di intorni aperti di 1 come nel lemma precedente tali che $F \cap U_0 = \emptyset$. Sia d la pseudometrica data dal lemma e sia $f_F(x) = d(x,F)$ la funzione distanza da F. Sappiamo che questa funzione è continua nella topologia indotta dalla pseudometrica. Per la continuità di d essa sarà continua anche rispetto alla topologia di G. Ora basta notare che $f_F(F) = 0$, mentre $f_F(1) = 1$. Questo dimostra che lo spazio G è di Tichonov, perchè la pseudometrica è invariante a sinistra e quindi lo stesso argomento serve per separare un punto generico $a \in G$ da un insieme chiuso F che non lo contiene (basta applicare una traslazione ad a). ♣

Teorema 6.11 *Un gruppo topologico è metrizzabile se e solo se esso ha una base numerabile di intorni di 1.*

Dimostrazione. La necessità è ovvia perchè ogni punto x in uno spazio metrico ha una base numerabile di intorni (i dischi di raggio razionale e centro x). Supponiamo ora che G ha una base numerabile di intorni di 1. Allora possiamo scegliere una catena (2) di intorni di 1 come nel lemma precedente che forma una base di $\mathcal{V}(1)$, in particolare, $\bigcap_{n=1}^\infty U_n = \{1\}$. Allora la pseudometrica garantita dal lemma è una metrica che induce la topologia del gruppo G per via delle inclusioni $U_n \subseteq B_{1/n} \subseteq U_{n-1}$. ♣

Esercizio 6.12 *Sottogruppi e quozienti di un gruppo topologico metrizzabile sono metrizzabili.*

Dimostrazione. Si applichi il teorema di metrizzazione. ♣

7 Compattezza

7.1 Gruppi compatti

Proposizione 7.1 *Sia G un gruppo topologico e sia K un insieme compatto in G. Allora:*

(a) *per ogni insieme aperto U contenente K esiste un intorno aperto V di 1 tale che $VK \subseteq U$ e $KV \subseteq U$,*

(b) *K è sotile (i.e., per ogni intorno aperto U di 1 esiste un intorno aperto V di 1 tale che $x^{-1}Vx \subseteq U$ for each $x \in K$),*

(c) *se L è un altro insieme compatto in G allora anche il prodotto $K \cdot L$ è compatto,*

(d) *se L è un insieme chiuso in G con $K \cap L = \emptyset$, allora esiste un $V \in \mathcal{V}(1)$ tale che $KV \cap LV = \emptyset$; in particolare ogni gruppo compatto è normale.*

Dimostrazione. (a) Per ogni $x \in K$ esiste un $V_x \in \mathcal{V}(1)$ con $xV_x^2 \subseteq U$. Per la compattezza di K esistono $x_1, \ldots, x_n \in K$ tali che $K \subseteq \bigcup_{k=1}^n x_k V_{x_k}$. Con $V = \bigcap_{k=1}^n V_{x_k}$ si ha $KV \subseteq U$.

(b) Sia $U \in \mathcal{V}(1)$, allora per ogni $x \in K$ esiste per il 3.17 un $V_x \in \mathcal{V}(1)$ e un intorno U-sotile W_x di x. Per la compattezza di K esistono $x_1, \ldots, x_n \in K$ tali che $K \subseteq \bigcup_{k=1}^n W_{x_k}$. Per 3.15 $\bigcup_{k=1}^n W_{x_k}$, e di conseguenza anche K, sono U-sotili.

(c) Il prodotto $K \cdot L$ è immagine continua dello spazio compatto $K \times L$ per la moltiplicazione $(x, y) \mapsto xy$.

(d) Segue da (a) con $U = G \setminus L$. ♣

Ricordiamo che il **cuore** H_G di un sottogruppo H di un gruppo G è il massimo sottogruppo normale di G contenuto in H (ovviamente, $H_G = \bigcap_{a \in G} aHa^{-1}$).

Osservazione 7.2 Il fatto che G è compatto è essenziale in questa proposizione. Infatti, vedremo nel seguito (cf. 7.19), che un sottogruppo aperto può avere cuore banale.

Lemma 7.3 *Sia G un gruppo topologico e sia N un sottogruppo chiuso compatto di G. Allora l'omomorfismo canonico $p : G \to G/N$ manda sottoinsiemi chiusi di G in sottoinsimi chiusi di G/N.*

Dimostrazione. Sia A un sottoinsieme chiuso di G. Allora AN è chiuso per l'Esercizio 4.2 e quindi, $U = G \setminus AN$ è aperto. Adesso per ogni $x \notin AN$, cioè $p(x) \notin p(A)$, $p(U)$ è un intorno aperto di $p(x)$ disgiunto da $p(A)$. Quindi $p(A)$ è chiuso. ♣

Proposizione 7.4 *Sia G un gruppo topologico e sia N un sottogruppo chiuso normale di G. Se entrambi N e G/N sono compatti, allora anche G è compatto.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{F} = \{F_a : a \in A\}$ una famiglia di insiemi chiusi con la proprietà dell'intersezione finita in G. Non è restrittivo supporre che $F_a \supseteq N$ per ogni $a \in A$. Adesso per l'omomorfismo canonico $p : G \to G/N$ abbiamo $p(\mathcal{F})$ una famiglia di insiemi chiusi (cf. 7.3) con la proprietà dell'intersezione finita in G/N. Per la compattezza di G/N esiste un punto comune $p(x)$, quindi x sta nell'intersezione di NF_a. Sia $x = f_a n_a$, con $f_a \in F_a$ e $n_a \in N$. Non è restrittivo assumere adesso che $\mathcal{F}$ sia chiusa per intersezioni finite. Definiamo un ordine parziale su A ponendo $a \leq a'$ se $F_a \supseteq F_{a'}$. Allora $(A, \leq)$ è un insieme parzialmente ordinato filtrante a destra, quindi $\{f_a\}$ è una rete in G. Per la compattezza di N non è restrittivo assumere che $n_a \to n$ converge in N (altrimenti si passa ad una sottorete convergente $\{n_{a_b}\}$). Ma allora $f_a = xn_a^{-1} \to xn^{-1}$. Poichè f_a sta definitivamente in F_a anche il limite $xn^{-1} \in F_a$. Questo dimostra che esiste un punto comune per tutti F_a. ♣

Proposizione 7.5 *Sia G un gruppo compatto e sia H un sottogruppo chiuso di G. Allora*

(a) *H è aperto se e solo se $[G : H] < \infty$;*

(b) *se H è aperto allora anche il cuore H_G di H è aperto.*

Dimostrazione. (a) Segue da (b) dalla Proposizione 3.5 e dal fatto che G è compatto.

(b) Dal (a) abbiamo $[G : H] < \infty$, quindi anche il normalizzatore di H ha indice finito, ma allora l'intersezione $\bigcap_{a \in G} aHa^{-1}$ che definisce H_G è finita. Poichè tutti sottogruppi aHa^{-1} sono aperti, anche H_G risulta aperto. ♣

Avremo spesso bisogno della seguente proprietà dei spazi topologici compatti.

Lemma 7.6 *Sia X uno spazio compatto, sia U un insieme aperto di X e sia $\mathcal{F}$ una famiglia di insiemi chiusi di X con la proprietà dell'intersezione finita. Se $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \subseteq U$, allora esistono $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$ tali che anche $\bigcap_{k=1}^n F_k \subseteq U$.*

Dimostrazione. Poichè lo spazio compatto X è ricoperto dalla famiglia di aperti $\{U\} \cup \{U \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$, esistono $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$ tali che $X = U \cup \bigcup_{i=1}^n U \setminus F_i$. Questo implica, ovviamente, $\bigcap_{k=1}^n F_k \subseteq U$. ♣

Esercizio 7.7 *Dimostrare che nel lemma precedente basta chiedere solo la compattezza di uno dei membri di $\mathcal{F}$ invece di chiedere la compattezza di tutto lo spazio X.*

7.2 Gruppi localmente compatti

Le proprietà che seguono si possono definire anche nella classe degli spazi topologici.

Definizione 7.8 Un gruppo topologico G è:

- *localmente compatto*, se esiste un intorno chiuso e compatto di 1,
- **σ-compatto** se $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ dove ogni A_n è un sottoinsieme compatto di G.
- *di Lindelöff*, se ogni ricoprimento aperto di X ammette un sottoricoprimento numerabile.

Esercizio 7.9 *Dimostrare che:*

(a) *ogni gruppo σ-compatto è di Lindelöff;*

(b) *ogni gruppo localmente compatto e di Lindelöff è σ-compatto,*

(c) *ogni gruppo localmente compatto e connesso è σ-compatto,*

(d) *tutte e tre proprietà (localmente compatto, σ-compatto, Lindelöff) sono preservate dal passaggio ai sottogruppi chiusi o quozienti,*

(e) *i prodotti diretti finiti preservano la compattezza locale e la σ-compattezza.*

Ogni gruppo localmente compatto contiene un sottogruppo aperto di Lindelöff (cf. (a)) e quindi normale. Di conseguenza, ogni gruppo localmente compatto è normale.

Ora vediamo che la controparte del 7.1 (b) non è vera per gruppi localmente compatti.

Esercizio 7.10 *Provare che il gruppo topologico $GL_2(\mathbb{R})$ non è sottile.*

Dimostrazione. Per $n \in \mathbb{N}$ siano

$$x_n = \begin{pmatrix} 1/n & 1/n \\ 0 & n \end{pmatrix} \text{ e } y_n = \begin{pmatrix} n & 1/n \\ 0 & 1/n \end{pmatrix}.$$

Allora $x_n y_n \to I_2$ mentre $y_n x_n = t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Adesso l'insieme $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ non è sotile. Infatti, sia $U \in \mathcal{V}(1)$ simmetrico con $t \notin U$. Supponiamo che esiste $V \in \mathcal{V}(1)$, tale che $V \subseteq U$ e $V \subseteq x_n U x_n^{-1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Poichè $x_n y_n \to I_2$, avremo $x_n y_n \in V$ per n sufficientemente grande. Allora $y_n \in U x_n^{-1}$ e quindi $y_n x_n \in U$. Ma per $y_n x_n = t$ avremo anche $t \in U$ – assurdo. ♣

Nel seguente teorema si dimostra che i gruppi localmente compatti soddisfano il teorema di Baire delle categorie.

Teorema 7.11 *Sia G un gruppo localmente compatto non discreto. Se $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ dove gli insiemi A_n sono chiusi, allora almeno uno di questi insiemi ha interiore non vuoto.*

Dimostrazione. Supponiamo ad assurdo che tutti A_n hanno interiore vuoto. Allora gli insiemi aperti $D_n = X \setminus A_n$ sono densi. Sia $U_0 \neq \emptyset$ un insieme aperto con chiusura $\overline{U_0}$ compatta. Per la densità dell'aperto D_1 l'intersezione $U_0 \cap D_1$ è non vuota. Per la regolarità di G (cf. 4.4) esiste un aperto non vuoto U_1 con $\overline{U_1} \subseteq U_0 \cap D_1$. Proseguendo così si costruisce per ogni $n > 0$ un aperto non vuoto U_n tale che $\overline{U_n} \subseteq U_{n-1} \cap D_n$. Adesso $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n} \neq \emptyset$, per la compattezza di $\overline{U_0}$. Quindi, passando ai complementi, si ricava $X \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ – assurdo.♣

Esercizio 7.12 *Ogni gruppo localmente compatto e numerabile è discreto.*

Esercizio 7.13 *Ogni gruppo abeliano compatto di torisone è di espenente finito.*

Dimostrazione. Applicare il Teorema 7.11 agli insiemi $A_n = \{x : nx = 0\}$. ♣

Non è ancora noto se questo teorema resta vero nel caso di gruppi compatti non abeliani.

Teorema 7.14 *Sia G un gruppo localmente compatto e σ-compatto. Allora ogni omomorfismo continuo e suriettivo $f : G \to H$, dove H è un gruppo localmente compatto di Hausdorff, è aperto.*

Dimostrazione. Siano $U, V \in \mathcal{V}(1)$ con $\overline{V}$ compatto e $\overline{V}^{-1} \cdot \overline{V} \subseteq U$. Per l'esercizio precedente esistono $x_1, \dots, x_n, \dots \in G$ tali che $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} x_n V$. Allora $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(x_n) f(V)$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme $A_n = f(x_n) f(\overline{V})$ è chiuso (essendo compatto in H) e $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Applicando il Teorema 7.11 concludiamo che uno degli insiemi A_n ha interiore non vuoto. Quindi anche $f(\overline{V})$ ha interiore non vuoto. Sia W un aperto in H contenuto in $f(\overline{V})$. Scegliamo $x \in \overline{V}$ con $f(x) \in W$. Allora $f(x)^{-1} W \in \mathcal{V}_H(1)$ e $f(x)^{-1} W \subseteq f(x^{-1}\overline{V}) \subseteq f(U)$ poichè $x^{-1}\overline{V} \subseteq U$. ♣

Diamo adesso un corollario di questo teorema della mappa aperta che può essere dimostrato anche direttamente.

Corollario 7.15 *Sia G un gruppo compatto e sia $f : G \to N$ un omomorfismo continuo e suriettivo su un gruppo topologico di Hausdorff N. Allora f è aperto.*

Dimostrazione. Diamo due dimostrazioni. La prima segue immediatamente dal teorema precedente notando che G è anche σ-compatto, mentre N risulta compatto quale immagine continua di un compatto.

Per dare una seconda dimostrazione applichiamo il teorema dell'isomorfismo all'omomorfismo f. Sappiamo che esiste un isomorfismo continuo $j : G/\ker f \to N$ tale che $f = j \circ \pi$, dove $\pi : G \to G/\ker f$ è l'omomorfismo canonico. Ora j risulta aperto per la compattezza di $G/\ker f$, quindi f è aperta quale composizione di due applicazioni aperte. ♣

Ricordiamo, che per un gruppo topologico G il carattere $\chi(G)$ si definisce con

$$\chi(G) = \min\{|\mathcal{B} : \mathcal{B} \text{ è una base di intorni di 1 in } G\}.$$

Introduciamo adesso il *pseudocarattere* $\psi(G)$ con

$$\psi(G) = \min\{|\mathcal{B} : \mathcal{B} \text{ è una famiglia di intorni di 1 in } G \text{ con } \bigcap_{U \in \mathcal{B}} U = \{1\}\}.$$

Esercizio 7.16 *Sia $\{G_i\}_{i \in I}$ una famiglia infinita di gruppi topologici. Allora*

a) $\psi(\prod_{i \in I} G_i) \leq |I| \cdot \sup_{i \in I} \psi(G_i)$;

b) se $|G_i| > 1$ per ogni $i \in I$, allora $\psi(\prod_{i \in I} G_i) \geq |I|$;

c) se α é un numero cardinale infinito, allora $\chi(\mathbb{T}^\alpha) = \psi(\mathbb{T}^\alpha) = \chi(\mathbb{R}^\alpha) = \psi(\mathbb{R}^\alpha) = \alpha$, di conseguenza $w(\mathbb{T}^\alpha) = w(\mathbb{R}^\alpha) = \alpha$.

Ovviamente, $\psi(G) \leq \chi(G)$, ma puo succedere $\psi(G) < \chi(G)$ come si vede nel seguente esempio:

Esercizio 7.17 *Sia H un insieme di caratteri $\mathbb{Z} \to \mathbb{T}$ che separa i punti di $\mathbb{Z}$. Allora $\chi(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_H) = |H|$. In particolare, se H è il gruppo $Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{T})$ di* tutti *i caratteri $\mathbb{Z} \to \mathbb{T}$, allora $\chi(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_H) = \mathbf{c} > \psi(\mathbb{Z}, \mathcal{T}_H) = \aleph_0$.*

Un altro modo per vederlo é notare che $\mathbb{T}^c$ ammette un sottogruppo dense e ciclico C. Allora $\chi(C) = \chi(\mathbb{T}^c) = c$ per il Lemma 6.7, mentre $\psi(C) = \aleph_0$ essendo C un gruppo numerabile.

Teorema 7.18 *Sia G un gruppo localmente compatto. Allora $\chi(G) = \psi(G)$.*

Dimostrazione. Basta provare che se $\mathcal{B}$ è una famiglia di intorni di 1 in G con $\bigcap U_{U \in \mathcal{B}} = \{1\}$, allora la famiglia $\mathcal{B}'$ delle intersezioni finite di membri di $\mathcal{B}$ è una base di intorni di 1 in G. Sia U un intorno aperto di 1 con chiusura compatta. Allora per ogni intorno aperto $V \subseteq U$ di 1 si ha $\{1\} = \bigcap_{U \in \mathcal{B}} U \subseteq V$. Quindi per il lemma 7.6 esistono $W_1, \dots, W_n \in \mathcal{B}$ tali che $\bigcap_{i=1}^n W_i \subseteq V$. Poichè $\bigcap_{i=1}^n W_i \in \mathcal{B}'$ abbiamo così dimostrato che $\mathcal{B}'$ è una base di intorni di 1. Poichè $|\mathcal{B}'| = |\mathcal{B}|$ abbiamo dimostrato che $\chi(G) = \psi(G)$. ♣

Esercizio 7.19 *Sia p un numero primo e sia $\mathbb{Q}_p$ il campo die numeri p-adici (ovvero, il campo dei quozienti dell'anello $\mathbb{J}_p$). Si consideri l'applicazione $\theta : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p$ definita tramite $\theta(x) = px$. Sia G il prodotto semidiretto di $\mathbb{Q}_p$ e il gruppo ciclico discreto $\langle\theta\rangle$, cioè il prodoto cartesiano $\mathbb{Q}_p \times \langle\theta\rangle$ con l'operazione " $\cdot$ " definita nel modo seguente:*

$$(\xi, \theta^n) \cdot (\eta, \theta^m) = (\xi + p^n \eta, \theta^{n+m}) \text{ per } \xi, \eta \in \mathbb{Q}_p, n, m \in \mathbb{Z}$$

e con la topologia del prodotto. Allora G risulta un gruppo topologico localmente compatto, poichè il sottogruppo $N = \mathbb{J}_p \times \{1\}$ è compatto e aperto. Dimostrare che il cuore di N è banale.

La struttura dei gruppi localmente compatti abeliani G si descrive facilmente tramite quella dei gruppi abeliani compatti: $G \cong \mathbb{R}^n \times H$, dove $n \in \mathbb{N}$ e H è contiene un sottogruppo compatto aperto ([DPS, Ch. 3]).

8 Connessione

8.1 Prerequisiti sugli spazi topologici connessi

Uno spazio topologico X è *connesso* se ogni funzione continua $X \to \{0,1\}$, dove $\{0,1\}$ è munito della topologia discreta, è costante.

Partizione di uno spazio topologico è una partizione $X = A_1 \cup A_2$ in due insiemi disgiunti *chiusi* (e conseguentemente *aperti*). È chiaro che X è connesso se e solo se l' unica partizione di X è quella banale $X = X \cup \emptyset$. In altre parole, X è connesso se e solo se non ha sottoinsiemi propri che sono contemporaneamente chiusi e aperti (vedi 8.5).

Esercizio 8.1 *Dimostrare che lo spazio di Sierpiński $\{0,1\}$ è connesso.*

Lemma 8.2 *Dimostrare che se $\{C_i\}_{i\in I}$ sono insiemi connessi dello spazio topologico X aventi un punto in comune allora anche l'insieme $\bigcup_{i\in I} C_i$ è connesso.*

Dimostrazione. Sia $C = \bigcup C_i$ e $f : C \to \{0,1\}$ una funzione continua. Per ipotesi, ognuna delle restrizioni $f|C_i$ deve essere costante. Poiché esiste un punto comune a tutti i C_i questa costante è comune per tutti i C_i. Di conseguenza anche f è costante. ♣

Lemma 8.3 *(i) Immagine continua di uno spazio connesso e connesso.*

(ii) Il prodotto $X = \prod_i X_i$ di spazi topologici è connesso se e solo tutti gli spazi X_i sono connessi.

(iii) La chiusura di un insieme connesso è connesso.

Dimostrazione. i) Ovvio.

ii) Per ogni $i \in I$ fissiamo un punto $x_i \in X_i$. Sia $\nu_i : X_i \to X$ l'immersione di X_i in X definita con $\nu_i(y) : I \to \bigcup_{i\in I} X_i$, $\nu_i(y)(i) = y$ e $\nu_i(y)(j) = x_j$ per $y \in X_i, j \in I, j \neq i$. Sia ora $f : X \to \{0,1\}$ una funzione continua. Allora la restrizione di f su ogni sottospazio connesso $\nu_i(X_i)$ di X è costante. Il valore di questa costante è $f(x)$ dove $x \in X$ è il punto determinato dalle proiezioni $x_i \in X_i$. Questo dimostra che f assume il valore costante $f(x)$ sul sottospazio $C_x = \bigcup_{i\in I} \nu_i(X_i)$ in forma di "croce" centrata su $x \in X$. Sia ora $y = (y_i) \in X$ un punto arbitarario del prodotto. Si vede analogamente, che f assume il valore costante $f(y)$ sull'insieme "in forma di croce" C_y definito analogamente relativo al punto y. Poichè C_x e C_y s'intersecano (per esempio, $\nu_i(y_i) \in C_x \cap C_y$), i valori $f(x)$ e $f(y)$ coincidono. Quindi f è costante.

iii) Sia D un sottoinsieme denso e connesso dello spazio X. Se $f : X \to \{0,1\}$ e continua allora f è costante su D, e quindi anche su X. ♣

Lemma 8.4 *(a) Dimostrare che se un sottoinsieme C di $\mathbb{R}$ è connesso, allora C è un intervallo.*

(b) Dimostrare che $\mathbb{R}$ è connesso. Dedurre che ogni intervallo su $\mathbb{R}$ è connesso e quindi un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è connesso se e solo se è un intervallo.

(c) (Teorema di Bolzano) *Siano $a < b$ numeri reali. Dimostrare che se una funzione continua $f : [a,b] \to [a,b]$ soddisfa $g(a) < 0 < g(b)$ allora esiste $x \in [a,b]$ con $g(x) = 0$.*

(d) Siano $a < b$ numeri reali. Dimostrare che ogni funzione continua $f : [a,b] \to [a,b]$ ha un punto fisso, cioè, esiste $x \in [a,b]$ tale che $f(x) = x$ [4]*.*

(e) Dimostrare che un sottoinsieme di $\mathbb{T}$ è connesso se e solo se è un arco (cioè, immagine di un intervallo tramite la mappa canonica $\mathbb{R} \to \mathbb{T}$).

Dimostrazione. (a) Supponiamo che C non sia un intervallo. Allora esiste $x \in \mathbb{R} \setminus C$ tale che $C_0 = (-\infty, x) \cap C \neq \emptyset$ e $C_1 = (x, +\infty) \cap C \neq \emptyset$ sono aperti (e chiusi). Ovviamente $C = C_0 \cup C_1$ è una partizione di C, assurdo.

(b) e (c) sono noti dal corso di analisi.

(d) Supponiamo che $f(a) \neq a$ e $f(b) \neq b$. Allora la funzione $g(x) = f(x) - x$ assume valori $g(a) < 0 < g(b)$. Quindi esiste $x \in [a,b]$ con $g(x) = 0$ e quindi $f(x) = x$. ♣

Applicando i lemmi precedenti si dimostra:

[4] Questo teorema si estende anche a $\mathbb{R}^n$: *ogni funzione continua $f : [0,1]^n \to [0,1]^n$ ha un punto fisso* (teorema di Brauwer del punto fisso). Per $n > 1$ la dimostrazione è molto più difficile.

Esercizio 8.5 *Sia X uno spazio topologico. Definiamo una relazione binaria $\sim$ su X ponendo $x \sim y$ per $x, y \in X$ se esiste un sottospazio connesso C di X che contiene sia x che y. Dimostrare che:*

i) $\sim$ è una relazione di equivalenza in X;

ii) le classi di equivalenza sono insiemi chiusi e connessi;

iii) X è connesso se e solo se non ha sottospazi propri che sono simultaneamente chiusi e aperti;

iv) X è connesso se e solo se per ogni sottoinsieme chiuso e proprio A di X esiste una rete in $X \setminus A$ che converge verso un punto di A.

Le classi di equivalenza di cui sopra saranno chiamati *componente connesse* dello spazio topologico X. Per $x \in X$ denoteremo con $C(x)$ *la componente connessa* del punto x, cioè l'unica componente connessa di X che contiene x.

Esercizio 8.6 *Verificare che se X e Y sono omeomorfi allora il numero delle componenti connesse di X e di Y coincidono.*

Suggerimento: Notare che ogni omeomorfismo $f : X \to Y$ induce una biiezione tra le componente connesse di X e Y. ♣

Esercizio 8.7 *Trovare quali tra i seguenti caratteri dell'alfabeto latino sono omeomrfi tra loro:*

C, D, E, F, G, I, J, L, M, N, O. P, Q, S, T, U, V, W, X, Y, Z.

Dimostrazione. Si vede facilmente che i seguenti caratteri sono omeomorfi tra loro.

C, G, I, J, L, M, N, S, U, V, W, Z.

Tra quelli che restano abbiamo altri quatro gruppi: $\{D, O\}$, $\{E, F, T, Y\}$, $\{K, X\}$ e $\{P, Q\}$. I caratteri in ognuno dei cinque gruppi sono omeomorfi tra loro, ma caratteri di diversi gruppi non sono omeomorfi tra loro. Infatti, si vede prima che tutti caratteri sono connessi. Poi possiamo isolare le seguenti proprietà che alcuni di loro hanno (qui $\mathcal{X}$ denota un carattere generico):

(i) per ogni punto x il complemento $\mathcal{X} \setminus \{x\}$ è connesso;

(ii) esiste un punto x per il quale il complemento $\mathcal{X} \setminus \{x\}$ ha tre componenti connesse;

(iii) esiste un punto x per il quale il complemento $\mathcal{X} \setminus \{x\}$ ha quatro componenti connesse;

(iv) esistono infiniti punti x per i quali il complemento $\mathcal{X} \setminus \{x\}$ è connesso.

I caratteri del primo gruppo hanno le seguenti proprietà :

$\neg$ (i), $\neg$ (ii), $\neg$ (iii) e $\neg$ (iv)[5],

quelli del secondo gruppo $\{D, O\}$ hanno le proprietà:

(i), $\neg$ (ii), $\neg$ (iii) e $\neg$ (iv),

quelli del terzo gruppo $\{E, F, T, Y\}$:

$\neg$ (i), (ii), $\neg$ (iii) e $\neg$ (iv);

quelli del quarto gruppo $\{K, X\}$ le proprietà:

$\neg$ (i), $\neg$ (ii), (iii) e $\neg$ (iv);

quelli del quinto gruppo $\{P, Q\}$ hanno le proprietà:

$\neg$ (i), $\neg$ (ii), $\neg$ (iii) e (iv);

Poiché ognuna delle proprietà (i)-(iv) o le loro negazioni sono preservate per omeomorfismo, questo termina l' esercizio (applicare l'esercizio precedente e l' esercizio 2.40). ♣

Lasciamo al lettore la verifica che nessuna delle proprietà (i)-(iv) può essere omessa al fine di distinuguere i cinque gruppi di caratteri.

Esercizio 8.8 *Verificare che la seguente proprietà :*

(*) esistono infiniti punti x per i quali il complemento $\mathcal{X} \setminus \{x\}$ ha due componenti connesse

non è valida solo per i caratteri del secondo gruppo $\{D, O\}$.

Ora definiamo la quasi-componente di un punto.

Definizione 8.9 *Quasi-componente* $Q(x)$ di un punto x in uno spazio topologico X è l'intersezione di tutti insiemi simultaneamente chiusi e aperti (brevemente, **chiusi-aperti**) di X che contengono x.

Ovviamente, $Q(x) \supseteq C(x)$ poichè ogni insieme chiuso-aperto contenente x contiene anche $C(x)$.

Definizione 8.10 Uno spazio X è *totalmente sconnesso* se ogni componente connessa di X consiste di un solo punto.

Esercizio 8.11 *Dimostrare che :*

(a) ogni sottospazio di uno spazio totalmente sconnesso è totalmente sconnesso;

(b) prodotto di spazi totalmente sconnessi è spazio totalmente sconnesso.

[5] cioè, la negazione di (iv).

Lemma 8.12 *Ogni spazio connesso e $T_{3.5}$ che abbia almeno due punti ha cardinalità $\geq \mathbf{c}$.*

Dimostrazione. Supponiamo che X possieda due punti distinti x e y. Sia $f : X \to [0,1]$ una funzione continua con $f(x) = 0$ e $f(y) = 1$. Ora $f(X)$ è un sottoinsieme connesso di $[0,1]$ contenente i punti 0 e 1. Allora $f(X) = [0,1]$, e di conseguenza $|X| \geq |f(X)| = \mathbf{c}$. ♣

Corollario 8.13 *Ogni $T_{3.5}$ spazio numerabile è totalmente sconnesso.*

Esercizio 8.14 *$I = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è totalmente sconnesso anche se non è numerabile.*

Esercizio 8.15 *Dare esempi di spazi totalmente sconnessi di cardinalità arbitrariamente grande.*

Suggerimento. Si applichi 8.11. ♣

8.2 Connessione e sconnessione in gruppi topologici

Per un gruppo topologico G la chiameremo *componente connessa* di G la componente connessa $C(1)$ del elemento neutro di G e la denoteremo con $C = C(G)$

Proposizione 8.16 *Per un gruppo topologico G la componente connessa di G è un sottogruppo chiuso normale. La componente connessa di $x \in G$ coincide con il laterale $xC(G) = C(G)x$.*

Dimostrazione. Scriveremo brevemente $C = C(G)$. Sappiamo dai risultati più generali nel caso dei spazi topologici che C è chiuso. Poichè C è il massimo sottoinsieme connesso di G che contiene 1, avremo $C \cdot C \subseteq C$ e $C^{-1} \subseteq C$ poichè entrambi $C \cdot C$ e C^{-1} sono connessi e contengono 1. Questo dimostra che C è un sottogruppo. Analogamente si vede che $x^{-1}Cx \subseteq C$ per ogni $x \in G$. ♣

Ovviamente, C è contenuto in ogni sottogruppo aperto di G. Quindi, se G è connesso (cioè, $C = G$), allora ogni intorno di e genera tutto il gruppo G.

Esercizio 8.17 *Se G è un gruppo localmente compatto e connesso, allora esiste un sottoinsieme compatto che genera G, quindi G è unione numerabile di insiemi compatti.*

Dimostrazione. Basta notare che se K è compatto, allora anche tutti prodotti $K \cdot K \cdots K$ sono compatti per 7.1. ♣

Proposizione 8.18 *Sia G un gruppo topologico e sia N un sottogruppo chiuso normale di G. Se entrambi N e G/N sono connessi, allora anche G è connesso.*

Dimostrazione. Sia $A \neq \emptyset$ un insieme chiuso-aperto di G. Poichè ogni laterale aN è connesso avremo $aN \subseteq A$ oppure $aN \cap A = \emptyset$. Quindi, $A = p^{-1}(p(A))$, dove $p : G \to G/N$ è l'omomorfismo canonico. Questo implica che $p(A)$ è un chiuso-aperto non vuoto del gruppo connesso G/N. Quindi $p(A) = G/N$. Di conseguenza $A = G$. ♣

Per un gruppo topologico G denotiamo con $Q(G)$ la quasi-componente del elemento neutro di G e la chiameremo *quasi-componente* di G.

Proposizione 8.19 *Per un gruppo topologico G la quasi-componente $Q(G)$ è un sottogruppo chiuso normale. La quasi-componente di $x \in G$ coincide con il laterale $xQ(G) = Q(G)x$.*

Dimostrazione. Siano $x, y \in Q(G)$. Per dimostrare che $xy \in Q(G)$ dobbiamo verificare che $xy \in O$ per ogni insieme chiuso-aperto O che contiene 1. Sia O un tale insieme, allora $x, y \in O$. Ovviamente Oy^{-1} è un insieme chiuso-aperto che contiene 1, quindi $x \in Oy^{-1}$. Questo implica $xy \in O$. Questo dimostra che $Q(G)$ è stabile per la moltiplicazione. Per ogni insieme chiuso-aperto O che contiene 1 anche O^{-1} ha la stessa proprietà, quindi $Q(G)$ è stabile anche rispetto all'operazione $a \mapsto a^{-1}$. Ciò implica che $Q(G)$ è un sottogruppo. Inoltre, per ogni insieme chiuso-aperto O che contiene 1 anche la sua immagine aOa^{-1} tramite il coniugio è aperto e chiuso e contiene 1. Quindi $Q(G)$ è stabile anche rispetto al coniugio. Quindi $Q(G)$ è un sottogruppo normale. Infine, essendo intersezione di insiemi chiusi, anche $Q(G)$ risulta chiuso. ♣

Vedremo nel seguito che $Q(G) = C(G)$ per gruppi localmente compatti G (cf. 8.30).

Teorema 8.20 (Shura-Bura) *In uno spazio compatto e T_2 le quasi componenti coincidono con le componenti connesse.*

Dimostrazione. Sia Q_x la quasi componente di $x \in X$. Vogliamo vedere che Q_x coincide con la componente connessa C_x di x. Infatti, basta vedre che Q_x è connessa. Supponiamo che esistono insiemi chiusi-aperti e disgiunti $A, B \subseteq Q_x$ tali che $Q_x = A \cup B$. Poichè A e B sono insiemi chiusi e disgiunti di X, per la normalità di X troviamo due aperti disgiunti U, V tali che $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ e $x \in A$. Quindi $Q_x \subseteq U \cup V$. Essendo Q_x l'intersezione di tutti intorni di x che sono chiusi ed aperti, per il 7.6 troveremo un numero finito di insiemi chiusi-aperti $F_1, \ldots, F_n$ con $Q_x \subseteq F = F_1 \cap \ldots \cap F_n \subseteq U \cup V$. Adesso F è chiuso-aperto, quindi

$$\overline{U \cap F} \subseteq \overline{U} \cap F = \overline{U} \cap (U \cup V) \cap F = U \cap F.$$

Quindi $U \cap F$ un insieme chiuso-aperto che contiene x, quindi $Q_x \subseteq U \cap F$. Pertanto $B \subseteq Q_x \subseteq U \cap F \subseteq U$. Di conseguenza $B \subseteq U \cap V = \emptyset$. Quindi l'unico insieme chiuso-aperto di Q_x che contiene x è Q_x. Perciò Q_x è connesso. ♣

Corollario 8.21 *Per un gruppo topologico compatto G è $C(G) = Q(G)$.*

Nel seguito dimostriamo l'eguaglianza $C(G) = Q(G)$ anche per gruppi localmente compatti (cf. Corollario 8.30).

8.3 Gruppi topologici totalmente sconnessi

Se $C(G) = \{e\}$ per un gruppo topologico G, allora G viene chiamato **totalmente sconnesso**.

Lemma 8.22 *Sia G un gruppo topologico e sia $C = C(G)$. Allora il gruppo G/C è totalmente sconnesso.*

Dimostrazione. Segue da Proposizione 8.18 applicato al l'immagine inversa H di $C(G/C)$ rispetto all'omomorfismo canonico $G \to G/C$, il sottogruppo C di H ed il gruppo quoziente $H/C \cong C(G/C)$. ♣

Ricordiamo che uno spazio topologico X è *zero-dimensionale* se X ha una base di aperti che sono anche chiusi. Nel caso dei gruppi topologici basta una base di intorni di 1 che consiste di insiemi chiusi-aperti. Ricordiamo anche che ogni spazio topologico T_2 e zero-dimensionale è totalmente sconnesso (poichè ogni punto x risulta essere intersezione di chiusi-aperti e quindi $Q(x) = \{x\}$).

Esercizio 8.23 *Sia τ una topologia lineare su un gruppo G. Allora (G, τ) è zero-dimensionale.*

Dimostrazione. Si applichi 3.5. ♣

L'implicazione apena dimostrata non si può invertire, vedremo tra breve un gruppo zero-dimensionale di cui topologia non è lineare (cf. 8.25).

Lemma 8.24 *Ogni gruppo topologico numerabile di Hausdorff è zero-dimensionale.*

Dimostrazione. Ogni gruppo topologico di Hausdorff risulta spazio $T_{3.5}$, quindi si può applicare Corollario 8.13. ♣

Esercizio 8.25 *Verificare che il gruppo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ è zero-dimensionale ma non ha sottogruppi aperti propri.*

Lemma 8.26 *Sia X uno spazio regolare di cui ogni punto ha un intorno zero-dimensionale. Allora anche X è zero-dimensionale.*

Dimostrazione. Sia $x \in C$ e sia U un intorno aperto di x. Allora esiste un intorno aperto V di x di cui chiusura $K = \overline{V}$ è zero-dimensionale e contenuta in U. Sia $O \subseteq V$ un intorno di x chiuso ed aperto come sottospazio di K. Poichè K è chiuso in X O è chiuso in X. D'altra parte esiste un aperto A di X tale che $O = A \cap K$. Poichè $O \subseteq V$ abbiamo

$$O = O \cap V = A \cap K \cap V = A \cap V,$$

quindi O è aperto anche in X. ♣

Ora vediamo che in presenza di compattezza locale i gruppi totalmente sconnessi risultano anche zero-dimensionali. Poichè il fatto vale anche per spazi topologici diamo la dimostrazione in quel caso generale.

Teorema 8.27 *Uno spazio compatto, T_2 e totalmente sconnesso è zero-dimensionale.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio compatto, T_2 e totalmente sconnesso. Per il teorema di Shura-Bura le quasi componenti sono triviali. Quindi, preso $x \in X$ abbiamo $Q(x) = \{x\}$. Sia adesso U un intorno aperto di x. Poichè $Q(x) \subseteq U$ è intersezione di insiemi chiusi-aperti, per il 7.6 una sottofamiglia finita di essi, $O_1, \ldots, O_n$ ha la proprietà $O = \bigcup_{k=1}^{\infty} O_k \subseteq U$. Poichè O resta chiuso-aperto, abbiamo dimostrato che X è zero-dimensionale. ♣

Corollario 8.28 (Vedenissov) *Uno spazio localmente compatto e totalmente sconnesso è zero-dimensionale.*

Dimostrazione. Sia $x \in X$ e sia U un intorno aperto di x con chiusura $K = \overline{U}$ compatta. Poichè K è totalmente sconnesesso, il teorema precedente implica che K è zero-dimensionale. Adesso per 8.26 anche X è zero-dimensionale. ♣

Adesso vedremo che la topologia dei gruppi compatti e totalmente sconnessi è lineare.

Teorema 8.29 *Sia G un gruppo topologico localmente compatto e sia $C = C(G)$. Allora:*

(a) *C coincide con l'intersezione di tutti sottogruppi aperti di G;*

(b) *se G è totalmente sconnesso, allora ogni intorno di e contiene an sottogruppo aperto di G.* ♣

Se G è compatto, allora i sottogruppi aperti in (a) e (b) possono essere scelti normali.

Dimostrazione. (a) segue da (b) poichè G/C è totalmente sconnesso sconnesso e quindi l'elemento neutro di G/C è intersezione di sottogruppi aperti (risp. aperti e normali) di G/C. Adesso l'intersezione delle immagini inversi, rispetto all'omomorfismo canonico $G \to G/C$, di questi sottogruppi coincide con C.

(b) Sia G un gruppo localmente compatto e totalmente sconnesso. Per il teorema di Vedenissov G ha una base $\mathcal{O}$ di intorni chiusi-aperti e simmetrici di 1. Sia $U \in \mathcal{O}$. Allora $U = \overline{U} = \bigcap_{V \in \mathcal{O}} UV$. Allora ogni insieme $U \cdot V$ è compatto per il 7.1, e quindi chiuso. Per il 7.6 esistono $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{O}$ tali che $U = \bigcap_{k=1}^{n} UV_k$. Allora per $V := \bigcap_{k=1}^{n} V_k$ si ha ovviamente $UV = U$. Questo ci dà anche $VV \subseteq U$, $VVV \subseteq U$ ecc. Poichè V è simmetrico, anche il sottogruppo $H = \langle V \rangle$ è contenuto in U. Da $V \subseteq H$ si deduce che H è aperto (cf. 3.5). In caso G è compatto, notiamo che il cuore H_G di H è un sottogruppo normale aperto contenuto in H e quindi in U (cf. 7.5). ♣

Il Lemma 8.25 dimostra che nessuno dei punti (a) e (b) del teorema precedente restano veri senza l'ipotesi "localmente compatto" sul gruppo G.

Corollario 8.30 *Sia G un gruppo topologico localmente compatto. Allora $Q(G) = C(G)$.*

Dimostrazione. Per il punto (a) del teorema precedente $C(G)$ è intersezione di sottogruppi aperti, che risultano anche chiusi in quanto sottogruppi aperti (cf. Proposizione 3.5). Quindi $C(G)$ contiene $Q(G)$ che coincide con l'intersezione di *tutti* gli insiemi chiusi-aperti di G contenenti 1. L'inclusione banale $C(G) \subseteq Q(G)$ vale sempre. ♣

9 Gruppi completi

Il nostro scopo adesso è di descrivere i gruppi tolpologici G che risultano chiusi in qualunque altro gruppo topologico H che li contiene come sottogruppo topologico. Si pone la questione se sia possibile individuare questa proprietà all' interno del gruppo G senza far ricorso a gruppi ambiente H che contengono G. A questo scopo notiamo che se G non risulta chiuso in qualche gruppo topologico H allora esiste una rete convergente $g_\alpha \to h$ dove $h \in H \setminus G$. Non è difficile verificare che la rete $\{g_\alpha\}$ soddisfa la seguente condizione:

$$\text{per ogni intorno } U \text{ di 1 in G esiste } \alpha_0 \in A \text{ tale che } g_\alpha^{-1} g_\beta \in U \text{ e } g_\beta g_\alpha^{-1} \in U \text{ per ogni } \alpha > \alpha_0, \beta > \alpha_0. \qquad (*)$$

Definizione 9.1 Una rete $\{g_\alpha\}_{\alpha \in A}$ in un gruppo topologico G soddisfacente (*) si chiamata **rete di Cauchy**.

Chiaramente, ogni rete convergente è rete di Cauchy. Nel lemma successivo vediamo quando questa implicazione si può invertire.

Lemma 9.2 **(1)** *Una rete di Cauchy è convergente se e solo se ha una sottorete convergente.*

(2) *Se $\{g_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è una rete di Cauchy, allora anche $\{g_\alpha^{-1}\}_{\alpha \in A}$ è una rete di Cauchy.*

(3) *Se $\{g_\alpha\}_{\alpha \in A}$ è una rete di Cauchy, allora per ogni intorno U di 1 in G esiste $\alpha_0 \in A$ tale che l'insieme $M = \{g_\alpha : \alpha \geq \alpha_0\}$ è U-sottile.*

(4) *Se $x' = \{x_a\}$ e $y' = \{x_a\}$ sono reti di Cauchy in G allora anche $\{x_a y_a\}$ è una rete di Cauchy.*

Dimostrazione. (1) Sia $\{g_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una rete di Cauchy e sia $\{g_{\alpha_\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma} \to x$ una sua sottorete convergente. Dimostriamo che $\{g_\alpha\}_{\alpha \in A}$ converge a x. Sia U un intorno di 1 in G e sia V un intorno simmetrico di 1 con $V^2 \subseteq U$. Poichè $\{g_{\alpha_\gamma}\} \to x$ esiste un $\gamma_0 \in \Gamma$ tale che $g_{\alpha_\gamma} \in Vx$ per ogni $\gamma \geq \gamma_0$. D'altra parte, esiste $\alpha_0 \in A$ tale che $\alpha_0 \geq \alpha_{\gamma_0}$ e $g_\alpha g_\beta^{-1} \in V$ per ogni $\alpha, \beta \geq \alpha_0$ in A. Con $\beta := \alpha_{\gamma_0}$ ricaviamo $g_\alpha \in V^2 x \subseteq Ux$ per ogni $\alpha \geq \alpha_0$, cioè $g_\alpha \to x$.

(3) Sia V un intorno simmetrico di 1 in G con $V^3 \subseteq U$. Esiste un $\alpha_0 \in A$ tale che $g_\alpha^{-1} g_\beta \in U$ e $g_\beta g_\alpha^{-1} \in U$ per ogni $\alpha \geq \alpha_0, \beta \geq \alpha_0$. Sia ora W un intorno di 1 in G con $g_{\alpha_0}^{-1} W g_{\alpha_0} \subseteq V$. Per vedere che $M = \{g_\alpha : \alpha \geq \alpha_0\}$ è U-sottile basta verificare che $g_\alpha^{-1} W g_\alpha \subseteq U$ per ogni $\alpha \geq \alpha_0$. Poichè $W \subseteq g_{\alpha_0} V g_{\alpha_0}^{-1}$, si ha

$$g_\alpha^{-1} W g_\alpha \subseteq g_\alpha^{-1} g_{\alpha_0} V g_{\alpha_0}^{-1} g_\alpha \subseteq V \cdot V \cdot V \subseteq U.$$

Per dimostrare (4) basta applicare (3) nel modo seguente. Sia U_0 un intorno di 1 in G e sia U un intorno di 1 con $U^2 \subseteq U_0$. Per il (3) esiste $a_0 \in A$ tale che l'insieme $M = \{x_a : a \geq a_0\}$ è U-sottile, cioè, esiste un intorno W di 1 tale che $W \subseteq U$ e $x_a^{-1} W x_a \subseteq U$ per ogni $a \geq a_0$. Ora esiste anche un a_1 tale che $y_a y_b^{-1} \in W$ e $x_a x_b^{-1} \in W$ per tutti $a, b \geq a_1$. Adesso

$$x_a y_a y_b^{-1} x_b^{-1} \in x_a W x_a^{-1} x_a x_b^{-1} \subseteq U x_a x_b^{-1} \subseteq U \cdot W \subseteq U^2 \subseteq U_0$$

per tutti $a, b \geq a_0$. ♣

Lemma 9.3 *Se $f : G \to H$ è un omomorfismo continuo di gruppi topologici e se $\{g_\beta\}$ è una rete di Cauchy in G allora $\{f(g_\beta)\}$ è una rete di Cauchy in H.*

Definizione 9.4 Un gruppo topologico G è *completo* se ogni rete di Cauchy è convergente in G.

Proposizione 9.5 *Siano G e H due gruppi topologici topologicamente isomorfi. Allora G è completo se e solo se H è completo.*

Vediamo adesso che un gruppo G, non necessariamente di Hausdorff, ed il suo quezionte $G/\overline{\{1\}}$ hanno "le stesse" reti di Cauchy e le stesse reti convergenti.

Proposizione 9.6 *Sia G un gruppo topologico, sia $H = \overline{\{1\}}$ e sia $p : G \to G/H$ l'omomorfismo canonico. Allora:*

(a) *una rete $\{x_a\}$ in G è convergente (di Cauchy) se e solo se $\{p(x_a)\}$ è convergente (di Cauchy) in G/H.*

(b) *G è completo se e solo se G/H è completo.*

Ora vediamo che la classe dei gruppi completi è chiusa rispetto al passaggio a sottogruppi chiusi e prodotti diretti.

Proposizione 9.7 *Sia G un gruppo completo e sia H un sottogruppo di G. Allora H è completo se e solo se H è chiuso.*

Proposizione 9.8 *Sia $\{G_i\}_{i\in I}$ una famiglia di gruppi topologici. Allora il loro prodotto è completo se e solo se lo sono tutti i gruppi G_i.*

Dimostrazione. Supponiamo che tutti i gruppi G_i siano completi. Sia $\{x_m\}$ è una rete di Cauchy in $G = \prod_i G_i$. Allora per ogni $i \in I$ la proiezione p_i è continua, quindi la rete $\{p_i(x_m)\}$ è di Cauchy in G_i (cf. 9.3). Allora per la completezza di G_i la rete $\{p_i(x_m)\}$ è convergente per ogni $i \in I$. Quindi anche la rete $\{x_m\}$ è convergente in X.

Supponiamo ora che il gruppo G sia completo. Ognuno dei gruppi G_i è topologicamente isomorfo ad un sottogruppo chiuso di G e quindi è completo per la proposizione precedente. ♣

Vedremo nel seguito che i gruppi localmente compatti sono completi (cf. 9.23). Un esempio di un gruppo completo non localmente compatto è ℓ_2. Anche il gruppo $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ è completo (dove $\mathbb{Z}$ è discreto) e non è localmente compatto. Questo ci fa vedere come i numeri irrazionali I, anche se non formano un sottogruppo di $(\mathbb{R}, +)$, ammettono una struttura di gruppo topologico abeliano, che ha la stessa topologia di I ed è in più un gruppo completo.

9.1 Completamento di un gruppo topologico

In questo paragrafo vediamo che ogni gruppo di Hausdorff si immerge in modo denso in un gruppo completo. Tale gruppo risulta inoltre unico a meno di isomorfismo topologico.

Lemma 9.9 *Sia G un gruppo topologico e $\mathcal{B}$ una base degli intorni di 1 in G. Se ogni $\mathcal{B}$-rete (cioè, una rete con dominio $\mathcal{B}$) di Cauchy in G converge, allora G è completo.*

Dimostrazione del lemma. Sia $\{x_a : a \in A\}$ una rete di Cauchy in G. Possiamo costruire la seguente $\mathcal{B}$-rete: per $U \in \mathcal{B}$ sia $a(U) \in A$ tale che $x_a^{-1} x_b, x_b x_a^{-1} \in U$ per $a, b \geq a(U)$. Adesso $\{x_{a(U)}\}_{U\in\mathcal{B}}$ è una $\mathcal{B}$-rete di Cauchy. Infatti, se $U_0 \in \mathcal{B}$ e $U_1 \in \mathcal{B}$ con $U_1^2 \subseteq U_0$, allora per ogni $U, V \subseteq U_1$ si ha $x_{a(U)}^{-1} x_{a(V)} = x_{a(U)}^{-1} x_{a(U\cap V)} x_{a(U\cap V)}^{-1} x_{a(V)} \in U \cdot V \subseteq U_0$.

Per ipotesi esiste $x = \lim x_{a(U)}$. Sia $V \in \mathcal{B}$ e $V_0 \in \mathcal{B}$ con $V_0^2 \subseteq V$. Scegliamo $U_0 \in \mathcal{B}$, tale che $U_0 \subseteq V_0$ e per ogni $U \subseteq U_0$ si ha $x_{a(U)} x^{-1} \in V_0$. Allora avremo:

$$(\forall a \geq a(U_0)) x_a x^{-1} = x_a x_{a(U_0)}^{-1} x_{a(U_0)} x^{-1} \in V_0 V_0 \subseteq V.$$

Questo dimostra il lemma. QED

Teorema 9.10 *Per ogni gruppo topologico di Hausdorff G esiste un gruppo topologico di Hausdorff completo $\tilde{G}$ e una immersione $\iota : G \to \tilde{G}$ di gruppi topologici tale che $\iota(G)$ sia denso in $\tilde{G}$.*

Dimostrazione. Sia G^* l'insieme di tutte le $\mathcal{B}$-reti di Cauchy in G. Per $x' = \{x_U\} \in G^*$, $y^* = \{x_U\} \in G^*$ poniamo $x^*y^* := \{x_U y_U\}$. Per il 9.2 $x^*y^* \in G^*$. Esiste poi l'omomorfismo iniettivo $\iota' : G \to G^*$ che manda ogni $g \in G$ nella rete di Cauchy costante $\iota'(g)$. Allora G^* risulta un gruppo con elemento neutro $\iota'(1)$.

Per ogni $U \in \mathcal{B}$ sia U^* il sottoinsieme di G^* di tutte le $\mathcal{B}$-reti che appartengono a U da un certo indice in poi. Allora $U \mapsto U^*$ è una biezione monotona. Con $\mathcal{B}^* := \{U^* : U \in \mathcal{B}\}$ definiamo una topologia su G^* con $\mathcal{B}^*$ come base del filtro di intorni di 1. Poichè $\iota'(U) = U^* \cap \iota'(G)$, l'omomorfismo ι' risulta un isomorfismo topologico tra G e $\iota'(G)$. Per vedere che G^* è completo basta vedere che tutte le $\mathcal{B}$-reti di Cauchy convergono in G^* (visto che $\mathcal{B} \cong \mathcal{B}^*$ come insiemi parzialmente ordinati). Sia $\{x^*_U\}$ una $\mathcal{B}$-rete di Cauchy in G^*. Per la densità di $\iota'(G)$ in G^* per ogni $U \in \mathcal{B}$ esiste $x_U \in G$ tale che $\iota'(x_U) \in x^*_U U^*$. Allora $\iota'(x_U){x^*_U}^{-1} \in U^*$ e quindi è una rete convergente a 1 in G^*, pertanto una $\mathcal{B}$-rete di Cauchy. Quindi $\iota'(x_U) = \iota'(x_U){x^*_U}^{-1} \cdot x^*_U$ essendo prodotto di due $\mathcal{B}$-reti di Cauchy in G^* è una $\mathcal{B}$-rete di Cauchy in G. Allora, esiste $x^* = \lim \iota(x_U) \in G^*$ per la definizione di G^*. Poichè $\lim \iota'(x_U){x^*_U}^{-1} = 1$, abbiamo $\lim x^*_U = x^*$. Sia $H = \bigcap U^*$ (la chiusura di 1 in G^*) e $f : G^* \to G^*/H$ l'omomorfismo canonico. Allora $\hat{G} := G^*/H$ è di Hausdorff è $\hat{G}$ è completo per il 9.6. Poichè $H \cap \iota'(G) = \{1\}$,componendo ι' con f si ottiene un omomorfismo iniettivo e continuo $\iota : G \to \hat{G}$. Di nuovo per il 9.6 $\iota : G^* \to \iota(G)$ è aperta se $\iota(G)$ ha la topologia indotta da $\hat{G}$. Quindi $\iota : G \to \hat{G}$ è una immersione topologica. ♣

La coppia $(\tilde{G}, \iota)$ data dal Teorema 9.10 sarà chiamata un **completamento** di G. Per vedere che il completamento di G è unico abbiamo bisogno del seguente lemma.

Lemma 9.11 *Sia $\iota : G \to \overline{G}$ un immersione densa di un gruppo topologico e sia $f : G \to H$ un omomorfismo continuo, dove H è un gruppo topologico completo. Allora esiste un unico omomorfismo continuo $\overline{f} : \overline{G} \to H$ tale che $\overline{f} \circ \iota = f$.*

Dimostrazione. Sia $x \in \overline{G}$. Allora esiste una rete $\{g_\alpha\}$ in G tale che $x = \lim g_\alpha$. Poiché la rete $\{g_\alpha\}$ è una rete di Cauchy in G anche la rete $\{f(g_\alpha)\}$ è una rete di Cauchy in H. Per la completezza di H esiste $\lim f(g_\alpha) := h$; possiamo allora porre $\overline{f}(x) := h$. ♣

Teorema 9.12 *Per ogni gruppo topologico G esiste un gruppo topologico completo $\hat{G}$ e un immersione di gruppi topologici $\iota : G \to \hat{G}$ tale che $\iota(G)$ è denso in $\hat{G}$. Se $f : G \to H$ è un omomorfismo continuo, dove H è un gruppo topologico completo, allora esiste un unico omomorfismo continuo $\hat{f} : \hat{G} \to H$ con $\hat{f}\iota = f$.*

Dimostrazione. L'esistenza segue dal Teorema 9.10. La seconda parte segue dal lemma precedente. ♣

Da questo teorema segue che c'è un unico (a meno di isomorfismo topologico) completamento $(\hat{G}, \iota)$ del gruppo G. (Per vederlo basta prendere nel teorema due completamenti $(\hat{G}, \iota)$ e (H, j), allora esiste un isomorfismo topologico $f : \hat{G} \to H$ con $f\iota = j$.) Nel seguito assumeremo che G sia un *sottogruppo* denso di $\hat{G}$ e ι è l'inclusione $G \hookrightarrow \hat{G}$.

Proposizione 9.13 *Se G è metrizzabile allora lo è anche il suo completamento.*

Dimostrazione. Si applichi 6.3 per concludere che se G ha una base numerabile di intorni di 1, allora anche il suo completamento ha una base numerabile di intorni di 1. Adesso si applica il teorema di metrizzazione. ♣

Proposizione 9.14 *Sia G un gruppo topologico e sia N un sottogruppo chiuso normale di G. Se entrambi N e G/N sono completi, allora anche G è completo.*

Esercizio 9.15 *Sia G un gruppo monotetico infinito. Allora esiste una topologia gruppale τ su $\mathbb{Z}$ tale che G è topologicamente isomorfo ad un sottogruppo del completamento di $(\mathbb{Z}, \tau)$ che contiene $\mathbb{Z}$.*

9.2 Completezza nel senso di Weil

Il completamento e la completezza considerata nel paragrafo precedente sono noti come **completamento e completezza di Raĭkov**. Storicamente le cose sono andate diversamente. Prima le reti di Cauchy sono state introdotte nel seguente modo asimmetrico.

Definizione 9.16 Una rete $\{g_\alpha\}_{\alpha \in A}$ in G è chiamata **rete di Cauchy a sinistra** (risp., **una rete di Cauchy a destra**) se per ogni intorno U di 1 in G esiste $\alpha_0 \in A$ tale che $g_\alpha^{-1} g_\beta \in U$ (risp. $g_\beta g_\alpha^{-1} \in U$) per ogni $\alpha > \alpha_0, \beta > \alpha_0$.

Chiaramente, ogni rete di Cauchy (in particolare, ogni rete convergente) è rete di Cauchy simultaneamente a sinistra e a destra. D'altra parte:

Esercizio 9.17 *Una rete di Cauchy a sinistra (risp., a destra) che ha una sottorete convergente è convergente. Se* $\{g_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *è una rete di Cauchy a sinistra (risp., a destra), allora* $\{g_\alpha^{-1}\}_{\alpha\in A}$ *è una rete di Cauchy a destra (risp., a sinistra).*

Lemma 9.18 *Se* $f : G \to H$ *è un omomorfismo continuo di gruppi topologici e se* $\{g_\beta\}$ *è una rete di Cauchy a sinistra (risp., a destra) in* G *allora anche* $\{f(g_\beta)\}$ *è una rete di Cauchy a sinistra (risp., a destra) in* H.

Definizione 9.19 Un gruppo topologico G è *completo nel senso di Weil* se ogni rete di Cauchy a sinistra è convergente in G.

Chiaramente, la definizione di completezza nel senso di Weil è equivalente a chiedere che ogni rete di Cauchy a destra converga in G. Poiché la proprietà "rete di Cauchy a sinistra" è più debole della proprietà "rete di Cauchy", ogni gruppo Weil-completo è anche completo, ma il contrario non è vero in generale (cf. §14).

I seguenti esercizi sono la controparte di 9.7 e 9.8.

Esercizio 9.20 *Sia* G *un gruppo completo nel senso di Weil. Allora un sottogruppo* H *di* G *è completo (nel senso di Weil) se e solo se* H *è chiuso.*

Esercizio 9.21 *Sia* $\{G_i\}_{i\in I}$ *una famiglia di gruppi topologici. Allora il loro prodotto è completo nel senso di Weil se e solo se lo sono tutti i gruppi* G_i.

Si potrebbe percorrere la stessa strada per definire il completamento di Weil:

Teorema 9.22 *Per ogni gruppo topologico* G *le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(a) esiste un gruppo topologico Weil-completo $\tilde{G}$ *e una immersione* $\iota : G \to \tilde{G}$ *di gruppi topologici tale che* $\iota(G)$ *sia denso in* $\tilde{G}$.

(b) Ogni rete di Cauchy a sinistra in G *è anche una rete di Cauchy a destra.* ♣

Chiaramente, se esiste un completamento di Weil esso sarà anche un completamento di Raĭkov e per l'unicità di quest'ultimo, entrambi i completamenti coincidono. In altre parole, il completamento di Raĭkov è anche completamento nel senso di Weil se e solo se le reti di Cauchy a sinistra in G sono reti di Cauchy. Non per tutti i gruppi topologici il completamento di Raĭkov risulta essere completamento di Weil, come vedremo nel §14. Evidentemente, per gruppi abeliani i concetti di completezza e di Weil-completezza coincidono. Nella Proposizione 9.24 diamo un risultato più preciso.

Ecco un esempio di una classe larga di gruppi completi nel senso di Weil.

Lemma 9.23 *Ogni gruppo localmente compatto è completo nel senso di Weil.*

Dimostrazione. Sia U un intorno di 1 con chiusura compatta e sia $\{g_\beta\}$ una rete di Cauchy a sinistra. Allora esiste α_0 tale che $g_\alpha^{-1}g_\beta \in U$ per ogni $\alpha > \alpha_0, \beta > \alpha_0$. In particolare, $g_\alpha \in g_{\alpha_0}U$ per ogni $\alpha > \alpha_0$. Per la compattezza di $g_{\alpha_0}\overline{U}$, concludiamo che esiste una sottorete convergente $\{g_{\alpha_\gamma}\} \to g$. Allora anche $g_\alpha \to g$ per il 9.17. ♣

Proposizione 9.24 *Sia* G *un gruppo topologico che ha un intorno sottile di 1. Allora in* G *le reti di Cauchy a sinistra coincidono con le reti di Cauchy a destra.*

Dimostrazione. Sia U_0 l'intorno sotile di 1 e sia $\{x_a\}$ una rete di Cauchy a sinistra. Sia $W \in \mathcal{V}(1)$ con $W^3 \subseteq U$. Per vedere che essa è anche una rete di Cauchy a destra prendiamo un $U \in \mathcal{V}(1)$. Sia a_0 tale che per ogni $a, a' \geq a_0$ sia $x_a^{-1}x_{a'} \in W$. In particolare, $x_a \in M = x_{a_0}W$ è un insieme sottile. Sia $V \in \mathcal{V}(1)$ tale che per ogni $m \in M$ sia ha $mV \subseteq Um$. Ora scegliamo $a_1 \geq a_0$ così da avere $x_a^{-1}x_{a'} \in V$ per tutti gli $a, a' \geq a_1$. Ma allora da $x_a \in x_{a'}V$ concludiamo che, per il fatto di avere $x_{a'} \in M$, anche $x_a \in Ux_{a'}$ per tutti $a, a' \geq a_1$. Quindi $\{x_a\}$ è anche una rete di Cauchy a destra ♣

9.3 Completezza e completamento tramite filtri

Sia G un gruppo topologico. Un filtro $\mathcal{F}$ su G si dice:

(a) *convergente* se esiste $x \in G$ tale che $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{V}_G(x)$;

(b) *di Cauchy a destra* se per ogni $V \in \mathcal{V}_G(1)$ esiste $F \in \mathcal{F}$ tale che $F^{-1} \cdot F \subseteq V$;

(c) *di Cauchy a sinistra* se per ogni $V \in \mathcal{V}_G(1)$ esiste $F \in \mathcal{F}$ tale che $F \cdot F^{-1} \subseteq V$;

(c) *di Cauchy* se è di Cauchy a destra e di Cauchy a sinistra.

Nel caso del punto (a) il punto x si chiama *limite* del filtro convergente $\mathcal{F}$.

Per un filtro $\mathcal{F}$ denotiamo con $\mathcal{F}^{-1}$ la famiglia $\{F^{-1} : F \in \mathcal{F}\}$. Non è difficile verificare che $\mathcal{F}^{-1}$ è un filtro.

Esercizio 9.25 *Sia G un gruppo topologico di Hausdorff. Dimostrare che:*

(1) ogni filtro convergente ha precisamente un limite;

(2) ogni filtro convergente è di Cauchy;

(3) se $\mathcal{F}$ è di Cauchy a destra allora $\mathcal{F}^{-1}$ è di Cauchy a sinistra;

(4) se $\mathcal{F}$ è di Cauchy a sinistra allora $\mathcal{F}^{-1}$ è di Cauchy a destra.

Lemma 9.26 *Sia G un sottogruppo di un gruppo topologico di Hausdorff H. Se G non è chiuso in H allora esiste un filtro di Cauchy non convergente di G.*

Dimostrazione. Sia $h \in H$ un punto di chiusura di G che non appartenga a G. Allora ogni intorno V di h in H interseca non banalmente G. Sia $\mathcal{F} = \{G \cap V : V \in \mathcal{V}_H(h)\}$. Non è difficile dimostrare che $\mathcal{F}$ è un filtro di Cauchy di G che non può essere convergente in G poichè $\mathcal{V}_H(h) \to h$ (cf. (1) dell'esercizio precedente). ♣

I filtri di Cauchy permettono di dare una costruzione alternativa del completamento di G come segue.

Definizione 9.27 Un filtro di Cauchy $\mathcal{F}$ dicesi *minimale* se per ogni $W \in \mathcal{F}$ esiste $W' \in \mathcal{F}$ e $U \in \mathcal{V}_G(1)$ tali che $U \cdot W' \cdot U \subseteq W$.

Ovviamente, ogni filtro convergente è un filtro di Cauchy minimale.

Sia $\overline{G}$ l'insieme di tutti i filtri di Cauchy minimali di G. Consideriamo G come parte di $\overline{G}$ identificando ogni $x \in G$ con il suo filtro di intorni $\mathcal{V}_G(x)$. Definiamo un operazione "·" tra filtri di Cauchy ponendo $\mathcal{F} \cdot \mathcal{H}$ per il filtro generato da $\{F \cdot H : F \in \mathcal{F}, H \in \mathcal{H}\}$. Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{H}$ sono minimali, anche il filtro di Cauchy $\mathcal{F} \cdot \mathcal{H}$ è minimale. Quindi, in questo modo si definisce un'operazione su $\overline{G}$.

Esercizio 9.28 *Verificare che ponendo*

$$\tilde{V} := \{\mathcal{F} \in \overline{G} : F \subseteq V \text{ per qualche } F \in \mathcal{F}\}$$

per ogni $V \in \mathcal{V}_G(1)$ si definisce un filtro di intorni di una topologia gruppale su $\overline{G}$ per la qualche $\overline{G}$ risulta il completamento di G.

Si potrebbe percorrere anche la strada alternativa simile a quella del completamento di Weil considerando separatamente filtri di Cauchy a destra e a sinistra. Notiamo che se G è contenuto in qualche gruppo topologico di Hausdorff H tale che un filtro di Cauchy a destra $\mathcal{F}$ di G diventa convergente in H, allora $\mathcal{F}$ sarà anche filtro di Cauchy a sinistra. In altre parole, possiamo rendere convergenti in qualche completamento di G solamente i filtri di Cauchy di G. Per poter definire il completamento definiamo una relazione di equivalenza $\sim$ nell'insieme $\mathbf{C}$ dei filtri di Cauchy di G come segue: $\mathcal{F} \sim \mathcal{G}$ per $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{C}$ se $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \in \mathbf{C}$. Denotiamo $\mathbf{C}/\sim$ con $\hat{G}$ e identifichiamo G con una parte di $\hat{G}$ tramite $x \mapsto {}_G(x)$. Definiamo un operazione "·" in $\hat{G}$ notando che l'operazione "·" definita sopra è compatibile con $\sim$, perciò definisce un'operazione su $\hat{G}$. Infine, per ogni $V \in \mathcal{V}_G(1)$ poniamo

$$V^* := \{\mathcal{F} \in \mathbf{C} : (\exists W \in \mathcal{V}_G(1))(\exists F \in \mathcal{F}) W \cdot F \cup F \cdot W \subseteq V\}/\sim .$$

Allora V^* genera una topologia gruppale su $\hat{G}$ per la quale G risulta un sottogruppo topologico denso. Se $\mathbf{F}$ è un filtro di Cauchy di $\hat{G}$, allora $\mathbf{H} := \{A \cdot V^* : A \in \mathbf{F}, V \in \mathcal{V}_G(1)\}$ è un filtro di Cauchy su $\hat{G}$ con $\mathbf{H} \sim \mathbf{F}$ e $H \cap G \neq \emptyset$ per ogni $H \in \mathbf{H}$. Allora $\mathcal{H} = \{H \cap G : H \in \mathbf{H}\}$ è un filtro di Cauchy su G e $\mathbf{F}$ converge a $\mathcal{H}$ in $\hat{G}$.

9.4 Completezza dei gruppi simmetrici

Storicamente i gruppi simmetrici $S(X)$ sono serviti per trovare facilmente dei contresempi. Questo rimane vero anche per gruppi topologici. Adesso consideriamo due proprietà di $S(X)$ che riguardano la completezza.

Teorema 9.29 *$S(X)$ è completo.*

Dimostrazione. Sia $\{f_\alpha\}$ una rete di Cauchy in $S(X)$. Allora per ogni insieme finito $E \subseteq X$ esiste α_0 tale che

$$f_\beta^{-1} f_\alpha \in S_E \text{ e } f_\alpha f_\beta^{-1} \in S_E \text{ per tutti } \alpha, \beta \geq \alpha_0. \tag{2}$$

La prima uguaglianza vuol dire che $f_\alpha|_E = f_\beta|_E$ quando $\alpha, \beta \geq \alpha_0$. Applicandola per $E = \{x\}$ vediamo che $\{f_\alpha(x)\}$ è convergente in X. Sia $f(x) = \lim_\alpha f_\alpha(x)$. Sfruttando la seconda uguaglianza in (2) avremo $f_\alpha^{-1}|_E = f_\beta^{-1}|_E$ quando

$\alpha, \beta \geq \alpha_0$ che vuol dire che $\{f_\alpha^{-1}(x)\}$ è convergente in X. Arriviamo così alla conclusione che per ogni $x \in X$ esiste $\lim_\alpha f_\alpha^{-1}(x) = g(x)$. Così abbiamo trovato due applicazioni $f, g : X \to X$ ed è facile vedere che $f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}$. Quindi $f \in S(X)$ e in più, $f_\alpha \to f$ in τ_X . Questo dimostra che $S(X)$ è completo. ♣

Ora vedremo che $S(X)$ non è completo nel senso di Weil. A questo scopo basta vedere che esiste una rete di Cauchy a sinistra che non è una rete di Cauchy a destra. Siano $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ di elementi distinti di X e sia $Y = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$. Definiamo $f_n : X \to X$ con $f_n(x_i) = x_{i+1}$ for $i = 1, \ldots, n-1$, $f_n(x_n) = x_1$ e $f_n(x) = x$ per $x \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$. Allora $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ è una rete (di fatto una successione) di Cauchy a sinistra. Infatti, sia E un sottoinsieme finito di X. Sia $k \in \mathbb{N}$ con $E \cap Y \subseteq \{x_1, \ldots, x_k\}$. Allora per $m, n > k$ si ha $f_n|_E = f_m|_E$, cioè $f_m^{-1} f_n \in S_E$. Quindi $\{f_n\}$ è una successione di Cauchy a sinistra.

Per ogni $x \in X$ esiste $\lim_n f_n(x) = f(x)$ in X. Infatti, $f(x_i) = x_{i+1}$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ e $f(x) = x$ per $x \in X \setminus Y$, quindi $f(X) = X \setminus \{x_1\}$. Di conseguenza $f \notin S(X)$, il che implica che $\{f_n\}$ non è convergente in $S(X)$. Poichè $S(X)$ è completo, questo implica che $\{f_n\}$ non è una rete di Cauchy a destra. Tuttavia, $\{f_n\}$ è convergente nel semigruppo X^X munito con la topologia della convergenza puntuale.

10 I sottogruppi dei gruppi compatti

Il concetto che introduciamo qui è la controparte della precompattezza definita per spazi metrici. Precisamente come in quel caso, risulterà

$$\text{“compatto”} = \text{“precompatto”} + \text{“completo”}.$$

Definizione 10.1 Un gruppo topologico G è *precompatto* se per ogni sottoinsieme aperto non vuoto U di G esiste un insieme finito F con $G = FU$.

Ovviamente, i gruppi compatti sono anche precompatti.

Lemma 10.2 *Ogni gruppo precompatto G è sotile.*

Dimostrazione. Sia $U \in \mathcal{V}$. Sia $W \in \mathcal{V}$ simmetrico con $W^3 \subseteq U$. Allora W è U-sotile. Per la precompattezza di G esiste un insieme finito $F \subseteq G$ tale che $G = FW$. Poichè ogni traslazione di W resta U-sotile, concludiamo che G è U-sotile. ♣

Ora vediamo che l'apparente assimmetria nella definizione di precompattezza è elliminabile.

Lemma 10.3 *Se G è precompatto, allora per ogni $U \in \mathcal{V}$ esiste un insieme finito F tale che $G = UF$.*

Dimostrazione. Sia $U \in \mathcal{V}$. Per il Lemma 10.2 esiste $V \in \mathcal{V}$ tale che per ogni $a \in G$ sia ha $aV \subseteq Ua$. Ora se $G = FV$ per qualche insieme finito F, sia ha $G = FV \subseteq UF$. ♣

Lasciamo al lettrore la facile dimostrazione della seguente

Proposizione 10.4 *La classe dei gruppi precompatti è chiusa rispetto al passaggio a prodotti diretti, quozienti e sottogruppi.*

Da questa proposizione segue che i sottogruppi dei gruppi compatti sono precompatti.

Esercizio 10.5 *Ogni topologia di un gruppo abeliano generata da caratteri è precompatta.*

Il 10.2 vuol dire che in ogni gruppo precompatto le reti di Cauchy a sinistra sono anche reti di Cauchy a destra, quindi il completamento di un gruppo precompatto è anche completamento nel senso di Weil. Vediamo prima che questo completamento è precompatto.

Lemma 10.6 *Sia G un sottogruppo denso di un gruppo topologico H. Se G è precompatto, allora anche H è precompatto.*

Dimostrazione. Fissiamo $U \in \mathcal{V}_H(1)$ e sia $V \in \mathcal{V}_H(1)$ con $V^2 \subseteq U$. Allora $GV = H$ per la densità di G in H. Poichè $V \cap G \in \mathcal{V}_G(1)$, esiste un insieme finito $F \subseteq G$ tale che $F \cdot (V \cap G) = G$.Allora $H = GV \subseteq FV^2 \subseteq FU$. ♣

Teorema 10.7 *Il completamento di un gruppo precompatto è compatto, quindi i gruppi precompatti sono precisamente i sottogruppi dei gruppi compatti.*

Dimostrazione. Sia G un gruppo precompatto, allora lo è anche il suo completamento $\hat{G}$ (cf. 10.6). Per semplificare la dimostrazione raggioneremo con il suo completamento $\hat{G}$ al posto di G, cioè, porremo $G = \hat{G}$. Per vedere che G è compatto basta vedere che ogni rete $\{x_a\}$ in G ha una sottorete di Cauchy (che converge in virtù della completezza di G). Infatti, poichè G è precompatto, per $U \in \mathcal{B}$ esistono un $V \in \mathcal{B}$ simmetrico con $V^2 \subseteq U$ e un insieme finito $F \subseteq G$ tale che $G = VF = FV$. Allora esistono $g, g_1 \in F$ e $a(U) \in A$ tali che per $a \geq a(U)$ $x_a \in gV$ e $x_a \in Vg_1$. Questo implica $x_a^{-1}x_b, x_bx_a^{-1} \in U$ per $a, b \geq a(U)$. Adesso $\{x_{a(U)}\}_{U\in\mathcal{B}}$ è una $\mathcal{B}$-rete di Cauchy. Infatti, se $U_0 \in \mathcal{B}$ e $U_1 \in \mathcal{B}$ con $U_1^2 \subseteq U_0$, allora per ogni $U, V \subseteq U_1$ si ha $x_{a(U)}^{-1}x_{a(V)} = x_{a(U)}^{-1}x_{a(U\cap V)}x_{a(U\cap V)}^{-1}x_{a(V)} \in U \cdot V \subseteq U_0$. ♣

Nel seguente lemma "precompatto" può essere sostituito da G sotile. Ricordiamo che G_δ-insieme in uno spazio topologico è un insieme che è intersezione di una famiglia numerabile di aperti. In particolare, ogni aperto è un G_δ-insieme (vedi anche 12.10).

Lemma 10.8 *Sia G un gruppo precompatto. Allora per ogni G_δ-insieme W di G che contiene 1, esiste un G_δ-sottogruppo normale $N \subseteq W$ di G.*

Dimostrazione. Sia W un insieme G_δ di G che contiene 1. Allora esistono intorni aperti V_n of 1 in G tali che $W = \cap\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$. Applicando 7.1 possiamo costruire per induzione una successione $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ di intorni aperti di 1 in G tali che $U_n^{-1} = U_n, x^{-1}U_{n+1}x \subseteq U_n$ per ogni $x \in G$ e $U_{n+1}^2 \subseteq U_n \cap V_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora $N' = \cap\{U_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \cap\{V_n\colon n \in \mathbb{N}\} = W$ è un G_δ-sottogruppo normale di G. ♣

Esercizio 10.9 *Sia G un gruppo precompatto. Allora esiste un omomorfismo continuo e iniettivo in un prodotto di gruppi precompatti metrizzabili.*

10.1 Il teorema di Følner

Per i gruppi precompatti abeliani diamo senza dimostrazione il seguente teorema di Følner che permette di descrivere questi gruppi tramite i caratteri $\chi : G \to \mathbb{T}$. Nel seguite denoteremo con G^* il gruppo di tutti i caratteri continui del gruppo G. (Qui si identifica $\mathbb{S}$ con $\mathbb{T}$ tramite l'ovvio isomorfismo che si ottiene dall'omomorfismo continuo $\mathbb{R} \to \mathbb{S}$.) Nei termini di 3.3 *ogni topologia precompatta di un gruppo abeliano è generata da caratteri*. Una dimostrazione, ragionevolmente elementare, di questo teorema si può trovare in [DPS].

Teorema 10.10 (Følner) *Sia G un gruppo precompatto abeliano. Allora per ogni $V \in \mathcal{V}_G(0)$ esistono $\delta > 0$ e caratteri continui $\chi_i : G \to \mathbb{T}$, $i = 1, \dots, n$, con $U(\chi_1, \dots, \chi_n; \delta) \subseteq V$.*

Corollario 10.11 *Ogni gruppo precompatto abeliano è topologicamente isomorfo ad un sottogruppo di qualche potenza di $\mathbb{T}$.*

Dimostrazione. Per il teorema di Følner la topologia di G coincide con la topologia $\mathcal{T}_{G^*}$ generata da tutti caratteri continui di G. Per il 5.11 l'omomorfismo canonico $f : G \to \mathbb{T}^{G^*}$ sarà un immersione topologica. ♣

10.2 Il teorema di Peter-Weyl

Per rendere meglio l'idea cominciamo con il caso abeliano del teorema di Peter-Weyl. Il grosso vantaggio adesso consiste nella possibilità di sfruttare il teorema di Følner evitando così la necessità di introdurre l'integrale di Haar. In più, il teorema vale anche per gruppi precompatti.

Teorema 10.12 *Sia G un gruppo precompatto abeliano. Allora per ogni $x \in G$, $x \neq 0$, esiste un carattere continuo $\chi : G \to \mathbb{T}$ con $\chi(x) \neq 0$.*

Dimostrazione. Sia $V \in \mathcal{V}_G(0)$ tale che $x \notin V$. Si applichi il teorema di Følner per trovare $\delta > 0$ e caratteri continui $\chi_i : G \to \mathbb{T}$, $i = 1, \dots, n$, con $U(\chi_1, \dots, \chi_n; \delta) \subseteq V$. Poichè $x \notin V$, esiste i tale che $\chi_i(x) \neq 0$. [6] ♣

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $\mathbb{U}(n)$ il gruppo unitario di ordine n – questo è il sottogruppo di $GL_n(\mathbb{C})$ che consiste di tutte le matrici unitarie A (cioè, con $\overline{A}^t \cdot A = I_n$, dove per $B \in B^T$ indica la matrice trasposta di B). Essendo homeomorfo ad un insieme chiuso e limitato di $\mathbb{C}^{n^2}$, $\mathbb{U}(n)$ è compatto. Il seguente teorema di Peter-Weyl implica che i gruppi unitari generano tutti i gruppi compatti.

Teorema 10.13 (Teorema di Peter-Weyl) *Sia G un gruppo compatto e sia $x \in G$ un elemento $\neq 1$. Allora esiste $n \in \mathbb{N}$ ed un omomorfismo continuo $f : G \to \mathbb{U}(n)$ tale che $f(x) \neq I_n$ in $\mathbb{U}(n)$.*

[6] Qui stiamo adoperando la notazione additiva per il gruppo $\mathbb{T}$, che comporta le ovvie modifiche nella definizione di $U(\chi_1, \dots, \chi_n; \delta)$ che non riportiamo qui esplicitamente.

Poniamo $\mathbb{U} := \prod_n \mathbb{U}(n)$, allora si ha

Proposizione 10.14 *Ogni gruppo compatto è topologicamente isomorfo ad un sottogruppo di qualche potenza di* $\mathbb{U}$.

Dimostrazione. Per ogni $x \in G$ con $x \neq 1$ scegliamo un omomorfismo continuo $f_x : G \to \mathbb{U}(n)$ tale che $f_x(x) \neq I_n$ in $\mathbb{U}(n)$. Possiamo ovviamente vedere f_x anche come un omomorfismo $f_x : G \to \mathbb{U}$. Adesso l'omomorfismo diagonale $f : G \to \mathbb{U}^{G\setminus\{1\}}$ risulta iniettivo e continuo. Per la compattezza di G f sarà un immersione topologica. Per finire notiamo che $f(G)$ è un sottogruppo chiuso di $\mathbb{U}^{G\setminus\{1\}}$ in quanto sottogruppo compatto. ♣

10.3 Gruppi di Lie e il quinto problema di Hilbert

Un gruppo topologico G è detto *gruppo di Lie* se per qualche $n \in \mathbb{N}$ esiste un intorno aperto U di $1 \in G$ omeomorfo ad un disco aperto di $\mathbb{R}^n$. Ovviamente $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{T}^n$ sono dei gruppi di Lie. Anche $GL(n, \mathbb{R})$ e $\mathbb{U}(n)$ sono dei gruppi di Lie. Ovviamente, i gruppi di Lie sono delle varietà topologiche perché ogni punto ha un intorno omomorfo ad un disco in $\mathbb{R}^n$. In particolare, ogni gruppo di Lie è localmente compatto. La seguente proprietà distingue i gruppi di Lie tra tutti i gruppi localmente compatti:

Definizione 10.15 Un gruppo topologico G si dice *NSS* se esiste un intorno U di 1 che non contiene sottogruppi non banali di G.

L'abbreviazione NSS sta per "no small subgroups". Ovviamente, $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{T}^n$ sono NSS. È meno banale dimostrare che *ogni* gruppo di Lie è NSS.

Teorema 10.16 *Sia G un gruppo topologico. Allora G è un gruppo di Lie se e solo se G è localmente compatto e NSS.*

Ogno gruppo di Lie G ha delle "coordinate locali" $(x_1, \dots, x_n)$ fornite dall'omeomorfismo tra un intorno aperto U di $1 \in G$ e un disco aperto in $\mathbb{R}^n$. Questo permette di scrivere le operazioni gruppali (moltiplicazione e inverso) come funzioni di $x_1, \dots, x_n$. Ovviamente, queste funzioni sono continue, ma si potrebbe chiedere se non risultano derivabili, o addirittura C^∞ o analitiche. Questa domanda, nota come "quinto problema di Hilbert", è stato posto da David Hilbert cent'anni fa. La sua soluzione ha richiesto lo sforzo di molta gente per la durata di quasi mezzo secolo. Adesso è noto che le coordinate possono essere scelte in modo tale che queste funzioni risultino analitiche.

11 Dualità di Pontryagin

Qui si definisce una topologia gruppale sul gruppo G^* dei caratteri.

Definizione 11.1 Il **gruppo duale** G^* di un gruppo topologico abeliano G è il gruppo G^* dei caratteri continui $\chi : G \to \mathbb{T}$ munito della **topologia della convergenza uniforme sui compatti** che ha come base di intorni di 0 gli insiemi

$$W(K, U) := \{\chi \in G^* : \chi(K) \subseteq U\}, \tag{$*$}$$

dove K varia tra gli insiemi compatti di G e U varia tra gli intorni aperti di 0 in $\mathbb{T}$.

Se $f : G \to H$ è un omomorfismo continuo tra due gruppi topologici abeliani, allora l'**omomorfismo aggiunto** $f^* : H^* \to G^*$, definito con $f^*(\chi) := \chi \circ f$, risulta sempre un omomorfismo continuo. In più, vale $(id_G)^* = id_{G^*}$ e $f^* g^* = (gf)^*$ quando la composizione è definita.

Nel caso in cui G sia discreto il gruppo G^* coincide con il gruppo di *tutti* gli omomorfismi $\chi : X \to \mathbb{T}$. Inoltre, gli insiemi K in (*) sono finiti, quindi la topologia di G^* coincide con quella della convergenza puntuale, cioè la topologia indotta da $\mathbb{T}^G$. Se invece G è compatto, il duale G^* risulta discreto perché possiamo prendere $K = G$ e U un intorno piccolo (senza sottogruppi non banali) di 0 in $\mathbb{T}$. Si può di nuovo definire il *biduale* $G^{**} := (G^*)^*$.

11.1 Calcolo del duale

Teorema 11.2

- *Sia $\{G_i\}_{i\in I}$ una famiglia di gruppi abeliani discreti. Allora $(\oplus_{i\in I} G_i)^* \cong \prod_{i\in I} G_i^*$ come gruppi topologici.*
- *Sia $\{G_i\}_{i\in I}$ una famiglia di gruppi abeliani compatti. Allora $(\prod_{i\in I} G_i)^* \cong \oplus_{i\in I} G_i^*$.*

Dimostrazione. Sia $\chi : \oplus_{i\in I} G_i \to \mathbb{T}$ un carattere e sia $\chi_i : G_i \to \mathbb{T}$ la sua restrizione su G_i. Allora $\chi \mapsto (\chi_i) \in \prod_{i\in I} G_i^*$ è l'isomorfismo $(\oplus_{i\in I} G_i)^* \cong \prod_{i\in I} G_i^*$ desiderato.

Sia $\chi : \prod_{i\in I} G_i \to \mathbb{T}$ un carattere continuo. Scegliamo un intorno U di 0 che non contiene sottogruppi non banali. Allora esiste un intorno V di 0 in $G = \prod_{i\in I} G_i$ con $\chi(V) \subseteq U$. Per la definizione della topologia di Tichonov esiste un sottoinsieme finito $F \subseteq I$ tale che V contiene il sottoprodotto $B = \prod_{i\in I\setminus F} G_i$. Essendo $\chi(B)$ un sottogruppo di $\mathbb{T}$, concludiamo per la scelta di U che $\chi(B) = 0$. Quindi χ si fattorizza per la proiezione $p : G \to \prod_{i\in F} = G/B$; in altre parole, esiste un carattere $\chi' : \prod_{i\in F} \to \mathbb{T}$ tale che $\chi = \chi' \circ p$. Ovviamente, $\chi' \in \oplus_{i\in I} G_i^*$. Allora $\chi \mapsto \chi'$ è l'isomorfismo $(\prod_{i\in I} G_i)^* \cong \oplus_{i\in I} G_i^*$ desiderato. ♣

Lemma 11.3 *Sia G un gruppo localmente compatto e σ-compatto e sia N un sottogruppo chiuso normale di G. Siano $\chi, \xi : G \to G/N$ due omomorfismi continui e suriettivi entrambi con nucleo N. Allora esiste un isomorfismo topologico $\iota : G/N \to G/N$ tale che $\chi = \iota \circ \xi$.*

Dimostrazione. Poichè $\ker\chi = \ker\xi = N$, per il teorema dell'isomorfismo applicato nel caso dei gruppi astratti esiste un isomorfismo algebrico $\iota : G/N \to G/N$ con $\chi = \iota \circ \xi$. Poichè G/N è localmente compatto, il teorema della mappa aperta 7.14 permette di affermare che entrambi χ e ξ sono aperti. Allora ι risulta un isomorfismo topologico. ♣

Con $\mathbb{J}_p$ indichiamo il gruppo (compatto) degli interi p-adici.

Proposizione 11.4 *Sia p un numero primo. Dimostrare che $\mathbb{Z}(p^\infty)^* \cong \mathbb{J}_p$, $\mathbb{J}_p^* \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$, $\mathbb{Z}^* \cong \mathbb{T}$, $\mathbb{T}^* \cong \mathbb{Z}$ e $\mathbb{R}^* \cong \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Per definizione $\mathbb{Z}(p^\infty)^* = \mathbb{J}_p$.

Per verificare che $\mathbb{J}_p^* \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$ prendiamo un carattere continuo non banale $\chi : J_p \to \mathbb{T}$. Scegliamo un intorno U di 0 che non contiene sottogruppi non banali. Allora esiste un intorno $p^n\mathbb{J}_p$ di 0 in $\mathbb{J}_p$ con $\chi(p^n\mathbb{J}_p) \subseteq U$. Essendo $\chi(p^n\mathbb{J}_p)$ un sottogruppo di $\mathbb{T}$, concludiamo per la scelta di U che $\chi(p^n\mathbb{J}_p) = 0$. In altre parole, $p^n\chi = 0$ ovvero, l'immagine di $\mathbb{J}_p$ tramite χ è contenuta nel sottogruppo $\mathbb{T}[p^n] = \{x \in \mathbb{T} : p^n x = 0\}$ di $\mathbb{T}$. Quindi ogni carattere $\chi \in \mathbb{J}_p$ è praticamente un omomorfismo continuo $\chi : \mathbb{J}_p \to \mathbb{Z}_{p^n} = \mathbb{T}[p^n]$. Assegnando a χ il valore $\chi(1) \in \mathbb{T}[p^n] \subseteq \mathbb{Z}(p^\infty)$ si ricava un omomorfismo $f : \mathbb{J}_p \to \mathbb{Z}(p^\infty)$ che risulta iniettivo (perchè $f(\chi) = 0$ implica che χ si annulla sul sottogruppo denso $\mathbb{Z}$ di $\mathbb{J}_p$ e di conseguenza $\chi = 0$). Ovviamente f è anche suriettivo. Ciò dimostra $\mathbb{J}_p^* \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$.

L'isomorfismo $g : \mathbb{Z}^* \to \mathbb{T}$ si costruisce ponendo $g(\chi) := \chi(1)$ per ogni $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{T}$.

Per vedere che $\mathbb{T}^* \cong \mathbb{Z}$ dimostriamo prima che un isomorfismo topologico $\chi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ coicide con $\pm id_{\mathbb{T}}$. Infatti, gli archi sono gli unici insiemi connessi di $\mathbb{T}$ (cf. Es. 8.4). Quindi χ manda ogni arco di $\mathbb{T}$ in un arco e manda i punti estremi in punti estremi. Qui e nel seguito φ denota l'omomorfismo canonico $\mathbb{R} \to \mathbb{T}$ e per $n \in \mathbb{N}$ poniamo $c_n = \varphi(1/2^n)$ per i generatori del gruppo di Prüfer $\mathbb{Z}(2^\infty)$ di $\mathbb{T}$. Ora, c_1 è l'unico elemento di $\mathbb{T}$ di ordine 2, quindi g lo lascia fisso, cioè $g(c_1) = c_1$. Quindi l'arco $A_1 = \varphi([0, 1/2])$ o copre se stesso o va nella sua immagine simmetrica $-A_1$. Consideriamo il primo caso. Allora si ha $g(c_2) = c_2$ o $g(c_2) = -c_2$ essendo $g(c_2)$ un elemento di ordine 4 e essendo $\pm c_2$ gli unici elementi di ordine 4 di $\mathbb{T}$. Per la scelta del caso $g(A_1) = A_1$ abbiamo anche $g(c_2) = c_2$ perché c_2 l'unico elemento di ordine 4 sull'arco A_1. Adesso l'arco $A_2 = [0, c_2]$ va in se stesso, e quindi per c_3 siamo costretti ad avere $g(c_3) = c_3$ essendo l'unico elemento di ordine 8 sull'arco A_2. Nello stesso modo si vede che $g(c_n) = c_n$. Qunidi g è identico su tutto il sottogruppo di Prüfer $\mathbb{Z}(2^\infty)$. Essendo quest'ultimo denso in $\mathbb{T}$ concludiamo che g è identico anche su $\mathbb{T}$. Nel modo analogo procede l'argomento nel caso $g(A_1) = -A_1$ e si dimostra che $g = -id_{\mathbb{T}}$. Sia ora $\chi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ un omomorpfismo continuo non banale. Allora l'immagine di χ è un sottogruppo chiuso e connesso di $\mathbb{T}$ e quindi coincide con $\mathbb{T}$. Sia $N = \ker g$. Allora N è un sottogruppo chiuso proprio di $\mathbb{T}$, quindi esiste n tale che $N = \mathbb{Z}_n$ (l'unico sottogruppo ciclico di $\mathbb{T}$ di ordine n). Sia adesso $\pi : \mathbb{T} \to \mathbb{T}/N$ l'omomorfismo definito con $\pi(x) = nx$. Ovviamente, anche $\ker\pi = N$. Per il Lemma 11.3, esiste un isomorfismo topologico $\iota : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ tale che $\iota \circ \pi = \chi$. Per la prima parte della dimostrazione, $\iota = \pm id_{\mathbb{T}}$. Quindi $\chi = \pm n \cdot id_{\mathbb{T}}$, cioè, $\chi(x) = \pm nx$ per ogni $x \in \mathbb{T}$. Abbiamo così dimostrato che ogni $\chi \in \mathbb{T}^*$ è la moltiplicazione con un numero intero $n \in \mathbb{Z}$. L'assegnazione $\chi \mapsto n$ definisce un omomorfismo $\mathbb{T}^* \to \mathbb{Z}$ che ovviamente è iniettivo e suriettivo, quindi è un isomorfismo.

Per vedere che $\mathbb{R}^* \cong \mathbb{R}$ consideriamo un carattere non banale $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$. Sia $N = \ker\chi$. Allora N è un sottogruppo chiuso proprio di $\mathbb{R}$, quindi N è ciclico. Sia b un generatore di N. Allora la moltiplicazione $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita con $\mu(x) = (1/b)x$ composta con $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ da un carattere $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ che ha lo stesso nucleo di χ. Per il Lemma 11.3 esiste un isomorfismo $\iota : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ tale che $\iota \circ \xi = \chi$. Poiché $\iota = \pm id_{\mathbb{T}}$ per l'argomento sopra esposto, abbiamo $\chi = \varphi(ax)$, dove $a = \pm 1/b$. Così si dimostra che ogni carattere $\chi \in \mathbb{R}^*$ ha la forma $\varphi(ax)$ per qualche $a \in \mathbb{R}$. L'assegnazione $\chi \mapsto a$ definisce l'isomorfismo $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ desiderato. ♣

11.2 Il teorema di dualità

Il punto chiave del seguente teorema di dualità di Pontryagin è che il duale di G^* (cioè, il biduale di G) è canonicamente isomorfo a G per ogni gruppo abeliano localmente compatto G. Per chiarire cosa vuol dire "canonicamente isomorfo", si definisce per ogni gruppo G un'applicazione $\omega_G : G \to G^{**}$ ponendo per ogni $x \in G$ e per ogni $\chi \in G^*$ $\omega(x)(\chi) :=$

$\chi(x)$. Per ogni gruppo abeliano localmente compatto G ω risulta continua, ma in generale è solo un omomorfismo di gruppi. Chiaramente, ω_G è iniettivo se e solo se G^* *separa i punti* di G, i.e., per ogni $x \in G$, con $x \neq 0$ esiste un $\chi \in G^*$ con $\chi(x) \neq 0$. Si dimostra che per un gruppo localmente compatto G il gruppo duale G^* è sempre localmente compatto, quindi anche il biduale G^{**} è localmente compatto.

Teorema 11.5 *ω_G è un isomorfismo topologico per ogni gruppo abeliano localmente compatto G.*

Dimostrazione. La continuità di ω_G si verifica partendo direttamente dalle definizioni. Tracciamo uno schema del resto della dimostrazione nel caso quando G è **compatto o discreto**. In entrambi casi ω_G è iniettivo perché i caratteri continui $\chi \in G^*$ separano i punti di G (nel caso in cui il gruppo G è compatto questo è il Teorema 10.12).

Per finire la dimostrazione nel caso di G discreto basta vedere che ω_G è suriettivo. Sia $\xi : G^* \to \mathbb{T}$ un elemento di G^{**}. Il gruppo compatto G^* si può considerare in modo naturale come sottogruppo compatto di $\mathbb{T}^G$. Per $x \in G$ denotiamo con $\pi_x : \mathbb{T}^G \to \mathbb{T}$ la proiezione che corrisponde all'elemento $x \in G$. In altre parole, per un elemento $\chi \in G^*$ si ha $\pi_x(\chi) = \chi(x) = \omega_G(x)(\chi)$. Perciò, la restrizione di π_x su G^* coincide con $\omega_G(x)$. Ovviamente l'intersezione $\bigcap_{x\in G} \ker \pi_x \cap G^* = \{1\}$. Ora scegliamo un intorno W di 0 in $\mathbb{T}$ che non contiene sottogruppi non banali. Sia U un intorno aperto di 0 in G^* con $\xi(U) \subseteq W$. Allora per la compattezza di G^* esiste un insieme finito $F \subseteq G$ tale che $A = \bigcap_{x\in G} \ker \pi_x \cap G^* \subseteq U$ (cf. Lemma 7.6). Ora l'immagine del sottogruppo A tramite ξ sarà un sottogruppo di W, quindi $\xi(A) = 0$. Quindi esiste un carattere $\xi_1 : G^*/A \to \mathbb{T}$ tale che $\xi = \xi_1 \circ p$, dove $p : G^* \to G^*/A$ è l'omomorfismo canonico che coincide con la restrizione della proiezione canonica $\pi : \mathbb{T}^G \to \mathbb{T}^F$. Vediamo ora che ogni carattere del sottogruppo chiuso $N = G^*/A$ di $\mathbb{T}^F$ si estende ad un carattere di T^F usando la struttura dei sottogruppi chiusi di $\mathbb{T}^F$. È noto che N si spezza in prodotto diretto $N = C \times F$, dove $C \cong \mathbb{T}^k$ e $\mathbb{T}^F = C \times \mathbb{T}^m$, $k + m = |F|$ e F è un sottogruppo finito di $\mathbb{T}^m$. Poiché $\xi_1 : N \to \mathbb{T}$ da luogo a due caratteri $\eta_1 : \mathbb{T}^k \cong C \to \mathbb{T}$ e $\eta_2 : F \to \mathbb{T}$, basta estendere η_2 ad un carattere $\mathbb{T}^m \to \mathbb{T}$. Ora $F = C_1 \times \ldots \times C_s$, dove C_i sono dei gruppi ciclici finiti e $s \leq m$. L'argomento precede con induzione per s. Sia $\kappa : \mathbb{T}^F \to \mathbb{T}$ l'estensione di $\xi_1 : N \to \mathbb{T}$. Per il calcolo esplicito di $\mathbb{T}^n$ eseguito sopra per $n = |F|$ finito sappiamo che esistono dei numeri interi $k_1, \ldots, k_n$ tali che $\kappa = \sum_{i=1}^n k_i \pi_{x_i}$. Quindi, $\xi = \xi_1 \circ p$ concide con la restrizione di $= \kappa \circ \pi$ e quindi con $\sum_{i=1}^n k_i \omega_G(x_i) = \omega_G(\sum_{i=1}^n k_i x_i) = \omega_G(x)$, dove $x = \sum_{i=1}^n k_i x_i$.

Nel caso in cui G sia compatto, il suo duale G^* (che è discreto) soddisfa il teorema di dualità, quindi $\omega_{G^*} : G^* \to G^{***}$ è un isomorfismo. Sfrutteremo questo fatto per vedere che ω_G è suriettivo. Infatti, supponiamo che ω_G non sia suriettivo. Allora $N = \omega_G(G)$ è un sottogruppo proprio di G^{**}. Inoltre, N è anche chiuso in quanto compatto (perché immagine continua del gruppo compatto G). Allora il gruppo quoziente G^{**}/N è un gruppo compatto non banale, quindi ammette un carattere non banale $\eta : G^{**}/N \to \mathbb{T}$. Questo da luogo, tramite la composizione con l'omomorfismo canonico $G^{**} \to G^{**}/N$, ad un carattere $\eta_1 : G^{**} \to \mathbb{T}$ con $\eta_1(N) = 0$. Poiché ω_{G^*} è suriettivo, esiste $\xi : G \to \mathbb{T}$ tale che $\eta_1 = \omega_{G^*}(\xi)$. Sia $x \in G$, allora $\eta_1(\omega_G(x)) = \omega_{G^*}(\xi)(\omega_G(x)) = \omega_G(x)(\xi) = \xi(x)$. Poiché $\eta_1(N) = 0$, avremo quindi $\xi(x) = 0$ per tutti gli $x \in G$. Quindi $\xi = 0$ e $\eta_1 = 0$ contrariamante all'ipotesi $\eta \neq 0$. Questo dimostra che ω_G è suriettivo. Poiché abbiamo già notato sopra che esso è anche iniettivo, abbiamo provato che ω_G è un isomorfismo algebrico. Per la continuità di ω_G e la compattezza di G segue che esso è di fatto un omeomorfismo. ♣

Per proseguire la dimostrazione nel caso generale si potrebbe ragionare così. Sia G un gruppo localmente compatto arbitrario. Allora, come notato sopra, esiste una presentazione $G = \mathbb{R}^n \times G_0$, dove G_0 ha un sottogruppo compatto e aperto K. Dato che il funtore * commuta con i prodotti finiti e $\mathbb{R}^* \cong \mathbb{R}$, basta considerare il caso $G = G_0$, cioè supporre che G abbia un sottogruppo compatto e aperto K. Allora G/K è discreto, e quindi il sottogruppo $A(K)$ del duale G^* è aperto. Essendo isomorfo al duale di G/K, $A(K)$ è anche compatto. Quindi la coppia $G^*, A(K)$ ha le stesse propietà della coppia G, K. Passando un altra volta al duale troviamo la coppia $G^{**}, A(A(K))$, dove $A(A(K)) \cong K^{**}$. Ora $\omega_G : G \to G^{**}$ ristretto a K da l'isomorfismo $\omega_K : K \to K^{**}$. Poiché entrambi i sottogruppi sono aperti, troviamo un isomorfismo topologico.

Esempio 11.6 Sia p un numero primo e sia G la somma diretta di $\aleph_0$ copie del gruppo ciclico $\mathbb{Z}_p$. Sia τ la topologia di G generata da tutti i caratteri di G. Allora (G, τ) non ha sottoinsiemi compatti infiniti ([DPS, Ch. 3]), quindi la topologia di $G^* = Hom(G, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p^{\mathbb{N}}$ è quella compatta, indotta da $\mathbb{T}^G$. Allora G^{**} è discreto. Pertanto G, essendo non discreto, non può essere isomorfo a G^{**}.

Per un sottoinsieme N di G,

$$A(N) := \{\chi \in X : \chi(N) = 0\}$$

è l'*annullatore* di N in X. Si vede facilmente che $A(N)$ è un sottogruppo chiuso di G^* e per due sottogruppi N e N' di G si ha

$$A(N + N') = A(N) \cap A(N') \text{ e } A(N \cap N') = A(N) + A(N'). \qquad (*)$$

Se G è localmente compatto e N è chiuso, allora il duale di N è isomorfo a $X/A(N)$ ed il duale di G/N è isomorfo a $A(N)$. Le eguaglianze (*) si estendono anche nel caso infinito come segue:

$$A(\Sigma_{i\in I} N_i) = \bigcap_{i\in I} A(N_i) \;\text{ e }\; A(\bigcap_{i\in I} N_i) = \overline{\Sigma_{i\in I} A(N_i)}. \qquad (**)$$

11.3 Proprietà del gruppo duale

Teorema 11.7 **(a)** *Il gruppo duale di un gruppo abeliano discreto di torsione è totalmente sconnesso.*

(a*) *Il gruppo duale (discreto) di un gruppo abeliano compatto e totalmente sconnesso è di torsione.*

(b) *il gruppo duale di un gruppo abeliano discreto senza torsione è connesso*

(b*) *il gruppo duale (discreto) di un gruppo abeliano compatto e connesso è senza torsione.*

Dimostrazione. Per il teorema di dualità (a) è equivalente a (a*) e (b) è equivalente a (b*). Per questo dimostreremo solo (a*) e (b*).

(a*) Sia G un gruppo abeliano compatto totalmente sconnesso. Per vedere che G^* è di di torsione scegliamo $\chi \in G^*$ ed un intorno piccolo U di 0 in $\mathbb{T}$. Allora $V = \chi^{-1}(U)$ è un intorno di 0 in G per la continuità di χ. Per il 8.29 esiste un sottogruppo aperto H di G contenuto in V, quindi $\chi(H) \subseteq U$. Poiché U è piccolo, si ha $\chi(H) = 0$. Ma H è aperto, quindi $\chi(H)$ è finito (cf. 7.5). Sia n l'ordine di $\chi(H)$, allora $n\chi = 0$ in G^*.

Ora supponiamo che G^* è di torsione, quindi per ogni carattere $\chi : G \to \mathbb{T}$ l'immagine $\chi(G)$ è finita. Quindi il gruppo G, essendo isomorfo ad un sottogruppo del prodotto dei gruppi finiti $\chi(G)$, risulta zero-dimensionale.

(b*) Se G è connesso, allora ogni carattere $\chi \in G^*$ è suriettivo, e quindi non è periodico. Se invece G non è connesso, allora per il 8.29 esiste un sottogruppo aperto H non banale tale che il quoziente G/H è finito, quindi esiate un carattere $G/H \to \mathbb{T}$ non banale. Questo ci dà un carattere periodico $G \to \mathbb{T}$. ♣

Lasciamo al lettore la dimostrazione (basata su (**), sul teorema precedente e sul teorema 8.29) della seguente

Proposizione 11.8
- *Sia G un gruppo abeliano compatto e sia C la sua componente connessa. Allora $A(C)$ coincide con il sottogruppo di torsione del duale G^*.*
- *Sia G un gruppo abeliano discreto e $t(G)$ il suo sottogruppo di torsione. Allora $A(t(G))$ coincide con la componente connessa del duale (compatto) G^*.*

Teorema 11.9 *Sia G un gruppo abeliano compatto o discreto. Allora G è senza torsione se e solo se G^* è divisibile.*

Dimostrazione. Sia p un numero primo. Allora $pG = \{px : x \in G\}$ è un sottogruppo chiuso in G. Dimostriamo che $A(pG) = G^*[p]$. Ovviamente, $\chi \in A(pG)$ è equivalente a $p\chi = 0$, cioè $\chi \in G^*[p]$. Quindi, $pG = G$ se e solo se $G^*[p] = 0$. Poiché $pG = G$ per ogni primo p è equivalente al fatto che G sia divisibile, abbiamo dimostrato che G è divisible se e solo se $G^*[p] = 0$ per ogni primo p, il che equivale a dire che G^* è senza torsione. ♣

Mettiamo insieme adesso tutto ciò che abbiamo visto per i gruppi compatti abeliani e connessi.

Corollario 11.10 *Per un gruppo compatto abeliano G le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- *G è connesso;*
- *G è divisibile;*
- *G^* è senza torsione.*

Esercizio 11.11 *Sia $f : G \to H$ un omomorfismo continuo di gruppi abeliani localmente compatti. Dimostrare che:*

- *$f^* : H^* \to G^*$ è iniettivo se e solo se $f(G)$ è denso in H,*
- *$f^*(H^*)$ è denso in G^* se f è iniettivo.*

Teorema 11.12 *Un gruppo abeliano compatto G è monotetico se e solo se è isomorfo ad un quoziente del gruppo $\mathbb{Q}^{*2^{\omega}} \times \Pi\{\mathbb{J}_p : p \in \mathbb{P}\}$.*

Dimostrazione. Applicare l'esercizio precedente all'omomorfismo iniettivo $f : \mathbb{Z} \to G$ con $f(\mathbb{Z})$ denso in G che esiste per ipotesi. Consideriamo l'omomorfismo aggiunto di f. Si ricava così un omomorfismo iniettivo $G^* \hookrightarrow \mathbb{T}$. Notare infine che il gruppo compatto $\mathbb{Q}^{*\mathbf{c}} \times \Pi\{\mathbb{J}_p : p \in \mathbb{P}\}$ è topologicamente isomorfo al duale del gruppo $\mathbb{T}$ munito della topologia discreta. (Infatti, abbiamo i seguenti isomorfismi di gruppi discreti $\mathbb{T} \cong (\oplus_{\mathbf{c}}\mathbb{Q}) \times (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ e $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong \oplus_p \mathbb{Z}(p^\infty)$.) ♣

Lemma 11.13 *Ogni gruppo abeliano totalmente sconnesso, compatto e monotetico N è topologicamente isomorfo ad un prodotto cartesiano $\Pi\{N_p : p \in \mathbb{P}\}$, dove ogni N_p è o $\mathbb{J}_p$ oppure un p-gruppo ciclico. In particolare, ogni gruppo abeliano totalmente sconnesso, compatto e monotetico è metrizzabile.*

Dimostrazione. Si può dimostare, usando il teorema cinese dei resti, che ogni sottogruppo chiuso del gruppo $\Pi\{\mathbb{J}_p : p \in \mathbb{P}\}$ ha la forma $\Pi\{H_p : p \in \mathbb{P}\}$, dove H_p è sottogruppo chiuso di $\mathbb{J}_p$. Infine, i sottogruppi chiusi di $\mathbb{J}_p$ sono $\{0\}$ e $p^p\mathbb{J}_p$, $n \in \mathbb{N}$. Adesso si applica il teorema precedente. ♣

Esercizio 11.14 *Dimostrare che per un gruppo abeliano connesso e compatto G le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- *G è monothetico;*
- *$w(G) \leq 2^\omega$;*
- *G è isomorfo ad un quoziente del gruppo $\mathbb{Q}^{*\mathbf{c}}$.*

Esercizio 11.15 *Ricavare dall'esercizio precedente una dimostrazione alternativa del fatto che il gruppo $\mathbb{T}^{\mathbf{c}}$ è monothtico.*

11.4 Il peso di un gruppo compatto abeliano

Il peso è una funzione cardinale monotona rispetto alla formazione dei quozienti e di sottogruppi (questo risulta immediatamente dalle definizioni).

Esercizio 11.16 *Siano $\{M_i\}_{\in I}$ gruppi topologici di peso numerabile e sia I infinito. Allora per $M = \prod_i M_i$ si ha $\psi(M) = \chi(M) = w(M) = |I|$.*

Lemma 11.17 *Sia G un gruppo abeliano compatto. Allora $w(G) \leq |G^*|$.*

Dimostrazione. Poichè G è isomorfo ad un sottogruppo del prodotto $\mathbb{T}^{G^*}$ (tramite l'omomorfismo diagonale di tutti i caratteri G^*), risulta $w(\mathbb{T}^{G^*}) = |G^*|$ per l'esercizio precedente. ♣

Lemma 11.18 *Sia X un gruppo abeliano non numerabile. Allora X contiene una somma diretta $\oplus_{i\in I} C_i$, dove $|I| = |X|$ e ogni C_i è un gruppo ciclico non banale.*

Dimostrazione. Sia $t(X)$ il sottogruppo periodico di X. Allora $|X| = |t(X)| \cdot |X/t(G)|$. Quindi, almeno una delle due cardinalità $|t(X)|$ e $|X/t(G)|$ non è numerabile. Supponiamo $|t(X)|$ numerabile. Allora $|X| = |X/t(X)| = r(X)$. Quindi X contiene un sottogruppo libero $\oplus_{|X|}\mathbb{Z}$, dunque in questo caso possiamo prendere $C_i = \mathbb{Z}$ per ogni i. Se invece $|t(G)|$ risulta non numerabile, allora $|Soc(X)| = |t(G)| = |X|$. Adesso $Soc(X) = \oplus_{i\in I} C_i$ dove i gruppi C_i sono gruppi ciclici finiti di ordine primo. ♣

Teorema 11.19 *Sia G un gruppo abeliano compatto. Allora $w(G) = |G^*|$.*

Dimostrazione. Per il Lemma 11.17 basta provare $w(G) \geq |G^*|$. Se G^* è numerabile, allora ovviamente $w(G) \geq \aleph_0 = |G^*|$. Supponiamo ora che $X = G^*$ non sia numerabile. Adesso basta applicare il lemma precedente per trovare un sottogruppo $Y = \oplus_{i\in I} C_i$, dove $|I| = |X|$ e ogni C_i è un gruppo ciclico non banale. Sia $N = A(Y) = \{x \in G : (\forall \chi \in Y)\, \chi(x) = 0\}$. Allora $G/N \cong Y^*$ e quindi $w(G) \geq w(G/N) = w(\prod_{i\in I} C_i^*) = |I| = |G^*|$ per il Lemma 11.16. ♣

Il segunte teorema è noto come teorema di Kakutani.

Teorema 11.20 *Sia G un gruppo abeliano compatto infinito. Allora $|G| = 2^{w(G)}$.*

Dimostrazione. Per il teorema precedente, basta vedere che $|G| = 2^{|G^*|}$. Sia $X = G^*$. Per il teorema di dualità si può identificare $G = X^*$. Quindi, basta vedere che $|X^*| = 2^{|X|}$ per un gruppo abeliano discreto infinito. Se $X \oplus_{i\in I} C_i$ è somma diretta infinita di gruppi ciclici (o semplicemente numerabili) questo è ovvio perchè adesso $X^* = \prod_i C_i^*$ e $|\prod_i C_i^*| = 2^{|I|}$ con $|I| = |X|$. Altrimenti, ci sono le seguenti possibilità.

1. X contiene una somma diretta infinita di gruppi ciclici $Y = \oplus_{i\in I} C_i$ e pertanto il suo inviluppo divisibile sarà di nuovo della forma $W = \oplus_{i\in I} D(C_i)$, dove i gruppi $D(C_i)$ sono numerabili. Allora $2^{|I|} = |Y^*| \leq |X^*| \leq |W^*| = 2^{|I|}$ con $|I| = |X|$.
2. X non contiene alcuna somma diretta infinita di gruppi ciclici. Quindi, $r(X)$ è finito e anche tutti gli $r_p(X)$ sono finiti. Quindi, X è numerabile. Ora basta vedere che $|X^*| = \mathbf{c}$. Se X non è priodico, allora contiene un sottogruppo ciclico infinito $C \cong \mathbb{Z}$. Ora $\mathbf{c} = |\mathbb{T}| = |C^*| \leq |X^*|$. Altrimenti, X è periodico. Poiché non contiene somme dirette infinite, il suo zoccolo $Soc(X)$ è finito. Allora $D(X) = \oplus_{i=1}^n \mathbb{Z}(p_i^\infty)$, dove $p_1, \ldots, p_n$ sono numeri primi (non necessariamente distinti). Poichè X è un sottogruppo infinito di $D(X)$, esiste un i tale che X contiene il sottogruppo $\mathbb{Z}(p_i^\infty$. Ma allora $\mathbf{c} = |\mathbb{J}_p| = |\mathbb{Z}(p_i^\infty)^*| \leq |X^*|$.

♣

11.5 Il gruppo $\mathbb{Q}^*$

Dato ora il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \prod_p \mathbb{J}_p$, consideriamo l'elemento $(1, \mathbf{1}) \in \mathbb{R} \times \prod_p \mathbb{J}_p$ ove $\mathbf{1} = (..., 1_p, ...)$ e $1_p \in \mathbb{J}_p$ per ogni $p \in \mathbb{P}$.

Il sottogruppo ciclico generato da $(1, \mathbf{1})$ è discreto in $\mathbb{R} \times \prod_p \mathbb{J}_p$: è sufficiente osservare infatti che

$$\langle (1, \mathbf{1}) \rangle \cap ((-1/2, 1/2) \times \prod_p \mathbb{J}_p) = \{0\},$$

ove $(-1/2, 1/2) \times \prod_p \mathbb{J}_p$ è aperto in $\mathbb{R} \times \prod_p \mathbb{J}_p$ cosicchè $\{0\}$ risulta aperto nella topologia relativa su $\langle (1, \mathbf{1}) \rangle$. Di conseguenza, il morfismo canonico $\psi : \mathbb{R} \times \prod_p \mathbb{J}_p \to \mathbb{R} \times \prod_p \mathbb{J}_p / \langle (1, \mathbf{1}) \rangle$ è un omeomorfismo locale.

Denotiamo con Q il quoziente $\mathbb{R} \times \prod_p \mathbb{J}_p / \langle (1, \mathbf{1}) \rangle$: Q è un gruppo abeliano senza torsione, l'immagine H di $\prod_p \mathbb{J}_p$ in Q è chiusa e compatta ed il quoziente Q/H è compatto. Applicando infatti i teoremi di isomorfismo otteniamo

$$Q/H = \psi(\mathbb{R} \times \prod_p \mathbb{J}_p) / \psi(\prod_p \mathbb{J}_p) \cong \mathbb{R} \times \prod_p \mathbb{J}_p / \langle 1 \rangle \times \prod_p \mathbb{J}_p \cong \mathbb{T}.$$

Dunque, in virtù della Proposizione 7.4, possiamo concludere che Q stesso è compatto. Osservando poi che l' immagine L di $\mathbb{R}$ in Q è connessa e densa, concludiamo che Q stesso è connesso per il lemma 8.3.

Dunque Q è un gruppo abeliano compatto e connesso, facilmente si verifica che è anche senza torsione pertanto, per la Corollario 11.10, è anche divisibile. Ne discende che il suo duale di Pontryagin Q^* è un gruppo discreto, divisibile e senza torsione ed è dunque completamente caratterizzato dal suo rango libero $r_0(Q^*)$. Poiché la dualità di Pontryagin preserva le successioni esatte corte, data la successione

$$0 \to H \to Q \to \mathbb{T} \to 0,$$

dualizzandola otteniamo $0 \to \mathbb{T}^* \to Q^* \to H^* \to 0$, pertanto $r(Q^*) = r(\mathbb{T}^*) + r(H^*) = 1$ essendo H^* periodico e quindi $r(H^*) = 0$. Ne discende che $Q^* \cong \mathbb{Q}$ e $Q \cong \mathbb{Q}^*$ topologicamente poichè $\mathbb{Q}$ è l'unico gruppo abeliano (discreto) con queste proprietà.

In virtù dell' isomorfismo topologico esistente fra $\mathbb{Q}^*$ e $\mathbb{R} \times \prod_p \mathbb{J}_p / \langle (1, \mathbf{1}) \rangle$, d' ora in poi identificheremo $\mathbb{R} \times \prod_p \mathbb{J}_p / \langle (1, \mathbf{1}) \rangle$ con $\mathbb{Q}^*$ e considereremo il morfismo canonico ψ precedentemente definito a valori in $\mathbb{Q}^*$ cioè $\psi : \mathbb{R} \times \prod_p \mathbb{J}_p \to \mathbb{Q}^*$.

Denoteremo d' ora in poi brevemente i sottogruppi $\{0\} \times \prod_p \mathbb{J}_p$ e $\mathbb{R} \times \{0\}$ di $\mathbb{R} \times \prod_p \mathbb{J}_p$ con $\prod_p \mathbb{J}_p$ ed $\mathbb{R}$ rispettivamente.

Osserviamo che la restrizione di ψ al sottogruppo $\prod_p \mathbb{J}_p$ di $\mathbb{R} \times \prod_p J_p$ è un morfismo ben definito poiché $\prod_p \mathbb{J}_p$ interseca $\ker(\psi)$ banalmente. Scriveremo brevemente $\mathbb{H} = \psi(\prod_p \mathbb{J}_p)$ e $\mathbb{H}_p = \psi(\mathbb{J}_p)$ per ogni $p \in \mathbb{P}$.

Anche la restrizione $\psi_| : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}^*$ è ben definita poiché $\mathbb{R}$ interseca $\ker(\psi)$ in 0, essa è anzi una biiezione continua. $\psi_|$ non è, tuttavia, un omeomorfismo, dal momento che $\mathbb{R}$ è completo mentre $\psi(\mathbb{R})$ è denso in $\mathbb{Q}^*$.

Risulta quindi che $\mathbb{Q}^* = \psi(\mathbb{R}) + \mathbb{H}$ ma la somma non è diretta: poiché infatti

$$\ker(\psi) = \langle (1, \mathbf{1}) \rangle,$$

si ha $0 = \psi(1, 0) + \psi(0, \mathbf{1})$ ed allora $\psi(1, 0)$ e $\psi(0, \mathbf{1})$ generano lo stesso gruppo ciclico. Infine è sufficiente osservare che $\psi(\mathbb{R}) \cap \mathbb{H} = \langle \psi(1, 0) \rangle = \langle \psi(0, \mathbf{1}) \rangle$ e che $\langle \psi(0, \mathbf{1}) \rangle$ è denso in $\mathbb{H}$.

Un modo equivalente di ricavare il duale $\mathbb{Q}^*$ potrebbe essere anche il seguente. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ l'omomorfismo canonico e sia $i : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{T}$ l'inclusione. Definiamo $g : \mathbb{R} \times (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to \mathbb{T}$ con $g(\rho, x) = f(\rho) - i(x)$ per $\rho \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Ovviamente $\ker g = \{(r, f(r)) : r \in \mathbb{Q}\} \cong \mathbb{Q}$ (l'isomorfismo è quello definito con $(r, f(r)) \mapsto r$). Ora la successione esatta

$$0 \longrightarrow \ker g \longrightarrow \mathbb{R} \times (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{T} \longrightarrow 0$$

da luogo alla successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \times (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^* \longrightarrow \mathbb{Q}^* \longrightarrow 0,$$

dove $\mathbb{Z}$ è il sottogruppo ciclico di $\mathbb{R} \times (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^* \cong \mathbb{R} \times (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^*$ generato dal carattere $g \in \mathbb{R}^* \times (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^*$.

11.6 Dimensione dei gruppi compatti

Per un gruppo di Lie G la dimensione $\dim G$ si può definire in modo del tutto naturale tramite la dimensione n dello spazio euclideo di cui disco aperto ammette un omeomorfismo con qualche aperto di G. In particolare, $\dim \mathbb{R}^n = \dim \mathbb{T}^n = n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Per un gruppo compatto abeliano G definiamo $\dim G = r(G^*)$, cioè, la dimensione di G coincide con il rango libero del suo duale di Pontryagin. Cerchiamo di convincerci che questo coincide con l'idea intutivo di dimensione.

Infatti, nel caso di $\dim G = 0$ abbiamo il Teorema 11.7 secondo il quale G è totalmente sconnesso (equivalente a zero-dimensionale per gruppi compatti in virtu del Teorema 8.29) se e solo se G^* è di torsione, cioè $r(G^*) = 0$. Inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\dim \mathbb{T}^n = n$ poichè $(\mathbb{T}^n)^* = \mathbb{Z}^n$ e $r(\mathbb{Z}^n) = n$.

Infine, l'eguaglianza $r(X) = r(X/Y) + r(Y)$ per ogni gruppo abeliano e suo sottogruppo Y ci da $\dim G = \dim N + \dim G/N$ per ogni gruppo abeliano compatto G e per ogni suo sottogruppo chiuso N. In particolare, si ha $\dim G = \dim C(G)$, cioè la dimensione di un gruppo compatto abeliano è determinata dalla dimensione della sua componente connessa perché il quoziente $G/C(G)$ è zero-dimensionale. Questo ci suggerisce di definire anche nel caso generale la dimensione di un gruppo compatto G come la dimensione della sua componente connessa $C(G)$. In altre parole, basta occuparsi della dimensione dei gruppi compatti e connessi. Per tali gruppi G si può trovare una famiglia di gruppi di Lie $\{L_i\}_{i\in I}$ semplici, compatti e connessi, un gruppo compatto, connesso e abeliano A e un sottogruppo chiuso centrale N di $A \times \prod_{i\in I} L_i$ tali che risulti $G \cong (A \times L)/N$, dove $L = \prod_{i\in I} L_i$. Si può dimostare che il gruppo N risulta zero dimensionale, così che si ha $\dim G = \dim(A \times L) = \dim A + \dim L$.

Ritornando alla dimensione dei gruppi compatti abeliani G, ricordiamo che $\dim G = \dim C(G)$. Qui ci sono due casi diversi. Per i gruppi di dimensione finita è facile dimostrare che la componente connessa $C(G)$ è metrizzablibe (essendo il duale X di $C(G)$ senza torsione e di rango finito). Per gruppi di dimensione infinita si ha $\dim G = \dim C(G) = w(C(G))$. Infatti, basta vedere l'ultima uguaglianza. Notiamo, che di nuovo il duale $X = C(G)^*$ è senza torsione e di rango $r(X)$ infinito. Allora $|X| = r(X)$ e questo implica $w(C(G)) = \dim C(G)$.

Diamo per convenienza la dimostrazione del seguente teorema sulla struttura dei gruppi abeliani compatti.

Teorema 11.21 *Sia G un gruppo abeliano compatto con $\alpha = \dim G$. Allora:*

i) *esiste un omomorfismo continuo e suriettivo*

$$f : (\mathbb{Q}^*)^\alpha \times \Pi\{\mathbb{Z}_p^{\alpha_p} : p \in \mathbb{P}\} \to G$$

con nucleo totalmente sconnesso, per opportuni numeri cardinali α_p $(p \in \mathbb{P})$;

ii) *esiste un omomorfismo continuo e suriettivo $\varphi : G \to \mathbb{T}^\alpha$ con nucleo totalmente sconnesso (in caso $\alpha = 0$ si pone $\mathbb{T}^\alpha\{0\}$).*

Dimostrazione. i) Sia X il gruppo duale (discreto) di G. Consideriamo l'inviluppo divisibile di X per trovare un omomorfismo iniettivo

$$g : X \to \mathbb{Q}^{(\alpha)} \times \oplus\{\mathbb{Z}(p^\infty)^{(\alpha_p)} : p \in \mathbb{P}\}$$

con conucleo di torsione. Passando ai duali troviamo l'omomorfismo suriettivo f come l'omomorfismo aggiunto g^*.

ii) Sia C la componente connessa di G. Consideriamo un sottogruppo libero F di G tale che X/F è di torsione e sia $f : F \hookrightarrow X$ l'inclusione. Allora F è isomorfo a $\mathbb{Z}^{(A)}$ per qualche A che è non vuoto se e solo se F non è di torsione, e soddisfa $|A| = |F| = |X/t(X)|$ nel caso in cui il secondo gruppo sia non numerabile. Poiché il gruppo duale di F è isomorfo a $\mathbb{T}^A$, passando all'omomorfismo aggiunto $\varphi = f^*$ troviamo un omomorfismo continuo e suriettivo $\varphi{:}G \to \mathbb{T}^A$ che ha la proprietà desiderata. Per verificarlo bisogna notare che $\ker \varphi$ è isomorfo al gruppo duale del quoziente $X/f(F)$, mentre C è isomorfo al duale di $X/t(X)$ (cf. 11.8). Per il Teorema 11.7 il gruppo duale di un gruppo di torsione è totalmente sconnesso. D'altra parte il secondo isomorfismo implica entrambi a) e *b*) in virtù della proprietà di F (vedi sopra) e l'uguaglianza $w(C) = |X/t(X)|$ (cf. Eser. 3 sotto) in particolare $C \neq 0$ se e solo se X non è di torsione, i.e. $A \neq \emptyset$ (cf. 11.7) ♣

12 Gruppi pseudocompatti e gruppi numerabilmente compatti

Qui studieremo altre proprietà dei gruppi topologici che generalizzano la compattezza e possono essere definite anche nella classe degli spazi topologici.

Definizione 12.1 Uno spazio topologico X è:

- **numerabilmente compatto**, se ogni ricoprimento aperto e numerabile di X ammette un sottoricoprimento finito.
- **pseudocompatto** se ogni funzione countinua su X a valori reali è limitata.

Per spazi topologici

compatto ⇒ numerabilmente compatto ⇒ pseudocompatto

ma nessuna di queste implicazioni è reversibile nemmeno per gruppi topologici (cf. Esercizio 12.9 e Lemma 12.21). La prima implicazione è banale, la seconda segue dal Lemma 12.2 e dal fatto ovvio che ogni sottoinsieme numerabilmente compatto di $\mathbb{R}$ è compatto (in particolare, limitato). Uno spazio pseudocompatto normale è numerabilmente compatto. Per spazi metrizzabili tutte e tre proprietà coincidono. Per gruppi topologici metrizzabili questo segue dal Teorema 12.15. È possibile un'altra dimostrazione di questo fatto, basata sull'Esercizio 12.3 e sul Teorema 2.59 secondo il quale ogni gruppo di Lindelöff è normale (e quindi la pseudocompattezza è uguale alla compattezza numerabile).

12.1 Proprietà degli spazi pseudocompatti e numerabilmente compatti

Lemma 12.2 *Sia $f : X \to Y$ un applicazione continua e suriettiva tra spazi topologici.*

(i) Se X è numerabilmente compatto allora anche Y è numerabilmente compatto.

Se X è pseudocompatto allora anche Y è pseudocompatto.

Esercizio 12.3 *Sia X uno spazio topologico: Dimostrare che:*

- *se X è numerabilmente compatto, allora X è compatto se e solo se X è di Lindelöff*
- *se X è di Lindelöff, allora X è compatto se e solo se X è numerabilmente compatto.*

È possibile caratterizzare la pseudocompattezza in termini interni allo spazio. A questo scopo ci serve il seguente concetto: una famiglia di sottoinsiemi $\{A_i\}_{i\in I}$ di uno spazio topologico X si dice *localmente finita* se per ogni $x \in X$ esiste un intorno U di x che interseca solo un numero finito di insiemi A_i.

Teorema 12.4 *Uno spazio topologico completamente regolare è pseudocompatto se e solo se ogni famiglia localmente finita di insiemi aperti non vuoti è necessariamente finita.*

Dimostrazione. Sia $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una famiglia localmente finita di insiemi aperti non vuoti di X. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissiamo $x_n \in U_n$ e consideriamo una funzione continua $f_n : X \to \mathbb{R}$ tale che $f_n(x_n) = n, f_n(X\backslash U_n) = \{0\}$ e $f \geq 0$. La funzione f è ben definita e non limitata. Quindi X non può essere pseudocompatto.

Supponiamo ora che X non sia pseudocompatto e sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione continua non limitata. Allora $U_n = f^{-1}((-n, n))$, per $n \in \mathbb{N}$, è aperto e la famiglia $\mathcal{U} = \{U_n : n \in N\}$ di insiemi aperti è localmente finita. Poichè f non è limitata, $\mathcal{U}$ contiene una sottofamiglia infinita di insiemi non vuoti, assurdo. ♣

Ricordiamo che un punto x di uno spazio topologico X si dice *punto di accumulazione* di un sottoinsieme $A \subseteq X$ se ogni intorno di x contiene infiniti punti dell'insieme A.

Teorema 12.5 *Per uno spazio topologico X sono equivalenti le seguenti proprietà:*

(1) X è numerabilmente compatto;

(2) ogni insieme infinito di X ha un punto di accumulazione;

(3) ogni catena $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_n \supseteq \ldots$ di sottoinsiemi chiusi non vuoti di X ha intersezione non vuota.

Dimostrazione. L'equivalenza di (1) e (3) si ottiene passando semplicemente ai complementi. Per dimostrare che (2) implica (3) supponiamo di avere una catena propriamente decrescente e scegliamo $x_n \in F_n \setminus F_{n+1}$. Allora F_n contiene la chiusura dell'insieme $A_n = \{x_n, \ldots, x_{n+k}, \ldots\}$. Sia x un punto di accumulazione dell'insieme A_1. Allora x appartiene anche alla chiusura di A_n per tutti n e quindi all'intersezione $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

Supponiamo ora che vale (3). Sia D un insieme infinito e siano $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ infiniti punti distinti di D. Sia F_n la chiusura dell'insieme $A_n = \{x_n, \ldots, x_{n+k}, \ldots\}$. Per ipotesi esiste un punto x che appartiene a F_n per tutti n. Ovviamente x è punto di accumulazione di D. ♣

12.2 Proprietà dei gruppi pseudocompatti

Diamo adesso il seguente collegamento importante con la precompattezza:

Proposizione 12.6 *Ogni gruppo pseudocompatto è precompatto.*

Dimostrazione. Sia G un gruppo topologico non-precompatto. Allora esiste un intorno aperto U di 1 in G tale che numero finito di traslazioni di U non coprono G. Allora si trova una successione di punti $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ di G tali che $x_n \notin \bigcup\{x_k U : 1 \leq k < n\}$. Si prenda adesso un intorno aperto e simmetrico V di 1 in G con $V^4 \subseteq U$. Allora $\{x_n V : n \in \mathbb{N}\}$ è una famiglia localmente finita infinita di insiemi aperti non vuoti di G. Quindi G non è pseudocompatto. ♣

Esercizio 12.7 *Sia G un gruppo topologico e sia H un sottogruppo normale aperto di G. Se G è numerabilmente compatto o di Lindelöff allora il quoziente G/N è numerabile.*

Esercizio 12.8 *Uno spazio topologico X è ω-*bounded *se ogni sottoinsieme numerabile di X ha chiusura compatta. Applicando il teorema 12.5 dimostrare che ogni spazio ω-bounded è numerabilmente compatto.*

Esercizio 12.9 *Sia K un gruppo compatto e sia I un insieme di cardinalità* $\mathbf{c}$. *Considerando per ogni sottoinsieme A di I il gruppo K^A come sottogruppo del gruppo G^I, sia G il sottogruppo di K^I somma di tutti sottogruppi K^A al variare di A tra tutti i sottoinsiemi numerabili di I. Dimostrare che G è ω-bounded e di conseguenza G è numerabilmente compatto.*

Un insieme A di uno spazio topologico X è detto **G_δ-denso** se ogni G_δ-insieme non vuoto di X interseca non banalmente A.

Esercizio 12.10 *Sia G uno spazio metrico. Dimostrare che:*

(a) Ogni sottoinsieme chiuso di X è un G_δ-insieme.

(b) Se il sottoinsieme Y di X è G_δ-denso allora $Y = X$.

Esercizio 12.11 *Sia $\{G_i\}_{i\in I}$ una famiglia infinita di gruppi topologici e $G = \prod_{i\in I} G_i$.*

- *Sia A un sottoinsieme numerabile di I e per ogni $a \in A$ sia U_a un G_δ-insieme di G_a. Allora $W = \prod_{a\in A} U_a \times \prod_{i\in I\setminus A} G_i$ è un G_δ-insieme di G. Dimostrare che ogni G_δ-insieme di G contiene un G_δ-insieme di G di questo tipo.*

- *Siano tutti i gruppi G_i metrizzabili. Dimostrare che un sottogruppo H di G è G_δ-denso se e solo se per ogni sottoinsieme numerabile A di I la proiezione canonica $\pi_A : G \to \prod_{i\in A} G_i$ manda il sottogruppo H su $\prod_{i\in A} G_i$.*

Vedremo nel seguito il noto teorema di Comfort e Ross: un gruppo G è pseudocompatto se e solo se il gruppo G è precompatto e G è G_δ-denso in $\hat{G}$ (cf. Teorema 12.15). La dimostrazione e basata sui seguenti due lemmi che diamo adesso senza dimostrazione. Ll fatto descritto nel primo lemma è tipico per gruppi topologici (infatti, non è valido per spazi topologici nemmeno se K è compatto).

Lemma 12.12 *Sia K un gruppo numerabilmente compatto e sia G un sottogruppo G_δ-denso di K. Allora G è pseudocompatto.*

Nel verso opposto abbiamo:

Lemma 12.13 *Sia G un gruppo topologico e sia H un sottogruppo denso e pseudocompatto di G. Allora H è G_δ-denso in G.*

12.3 Il teorema di Comfort e Ross

I seguenti due teoremi sono dovuti a Comfort e Ross [CR].

Teorema 12.14 *Sia $\{G_i :\in I\}$ una famiglia di gruppi topologici. Il prodotto $G = \Pi\{G_i :\in I\}$ è pseudocompatto se e solo se tutti gruppi G_i sono pseudocompatti.*

Dimostrazione. Se G è pseudocompatto, allora ogni gruppo G_i è pseudocompatto in quanto imagine continua di G sotto la proiezione. Supponiamo che tutti i gruppi G_i sono pseudocompatti.Allora per il Lemma 12.18 G_i è G_δ-denso nel suo completamento $\hat{G}_i$. È facile vedere che adesso il gruppo G è G_δ-denso nel prodotto $\Pi\{\hat{G}_i :\in I\}$ che è isomorfo al completamento (compatto) di G. Per il Lemma 12.12 G è pseudocompatto. ♣

Teorema 12.15 *Per un gruppo precompatto G le seguenti condizioni sono equivalenti:*

a) *G è pseudocompatto,*

b) *G è G_δ-denso in $\hat{G}$,*

c) *per ogni G_δ-sottogruppo chiuso e normale N di $\hat{G}$ tutti laterali di N intersecano G (i.e., $\hat{G} = GN$).*

Dimostrazione. a) $\to$ b) segue dal Lemma 12.18, e b) $\to$ a) segue dal Lemma 12.12.

L'implicazione b) $\to$ c) è banale, mentre c) implica b) perchè ogni G_δ-insieme in $\hat{G}$ che contiene 1 contiene anche un G_δ-sottogruppo chiuso e normale di $\hat{G}$ (cf. Lemma 10.8). ♣

Corollario 12.16 *Ogni gruppo pseudocompatto e metrizzabile è compatto.*

Si può dimostrare che le condizione di cui al Teorema 12.15 sono equivalente anche alle seguenti due condizioni:

d) ogni funzione continua $f : G \to \mathbb{R}$ si estende a $\hat{G}$,

e) ogni funzione continua $f : G \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua.

Corollario 12.17 *Se un gruppo topologico G contiene un sottogruppo denso e pseudocompatto, allora anche G è pseudocompatto.*

Dimostrazione. Sia H un sottogruppo denso e pseudocompatto di G. Per la densità di H si ha $\hat{H} = \hat{G}$ compatto e H risluta G_δ-denso in $\hat{G}$ per il Teorema 12.15. Allora anche G è G_δ-denso in $\hat{G}$ e di conseguenza anche G è pseudocompatto per lo stesso teorema. ♣

Esercizio 12.18 *Nell'Esercizio 12.9 sia $K = \mathbb{T}$. Dimostrare che il sottogruppo G di $\mathbb{T}^I$ è G_δ-denso e concludere che G è pseudocompatto.*

Adesso daremo un esempio di gruppo pseudocompatto che non è numerabilmente compatto. Avremo bisogno dei seguenti lemmi.

Lemma 12.19 *Sia G un gruppo precompatto e sia $f : G \to H$ un omomorfismo continuo e suriettivo. Allora $w(H) \leq w(G)$.*

Dimostrazione. Sia $g = \hat{f} : \hat{G} \to \hat{H}$ l'estensione di f ai completamenti. Poichè $g(\hat{G})$ è compatto e quindi chiuso in $\hat{H}$ e contiene il sottogruppo denso H di $\hat{H}$ si ha $g(\hat{G}) = \hat{H}$. Allora, in quanto omomorfismo continuo e suriettivo tra gruppi compatti g risulta anche aperto e quindi $\hat{H}$ è un quoziente di $\hat{G}$. Questo implica $w(G) = w(\hat{G}) \geq w(\hat{H}) \geq w(H)$. ♣

Lemma 12.20 *Sia G un gruppo topologico abeliano e siano H e N due sottogruppi precompatti e metrizzabili di G. Allora anche $H + N$ ha le stesse proprietà.*

Dimostrazione. Ovviamente il prodotto $H \times N$ è sia metrizzabile che compatto. Sia $f : H \times N \to G$ l'omomorfismo definito con $f(x, y) = x + y$ per $x \in H, y \in N$. Allora anche il sottogruppo $H + N = f(H \times N)$ ha le stesse proprietà quale immagine omomorfa continua di $H \times N$. ♣

Lemma 12.21 *Per un gruppo abeliano precompatto G denotiamo con $M(G)$ la somma di tutti i sottogruppi metrizzabili di G. Dimostrare allora che:*

(a) *$M(G)$ è un sottogruppo di G;*

(b) *se per $x \in G$ la topologia relativa di $\langle x \rangle$ è lineare, allora $x \in M(G)$;*

(c) *$(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\mathbf{c}} \subseteq M(\mathbb{T}^{\mathbf{c}}) \neq \mathbb{T}^{\mathbf{c}}$;*

(d) *il sottogruppo $H = M(\mathbb{T}^{\mathbf{c}})$ di $\mathbb{T}^{\mathbf{c}}$ è pseudocompatto;*

(e) *il sottogruppo $H = M(\mathbb{T}^{\mathbf{c}})$ non è numerabilmente compatto.*

Dimostrazione. (a) segue dal lemma precedente.

(b) se x è di ordine finito, allora ovviamente $x \in M(G)$. Altrimenti $\langle x \rangle \cong \mathbb{Z}$ e basta notare che ogni topologia lineare su $\mathbb{Z}$ è metrizzabile poichè $\mathbb{Z}$ ha una quantità numerabile di sottogruppi.

(c) Sia I un insieme di indici con $|I| = \mathbf{c}$. Allora per ogni $x = (x_i)_{i \in I} \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^I$ e per ogni $i \in I$ il sottogruppo $F_i = \langle x_i \rangle$ di $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ è finito. Quindi $x \in \prod_{i \in I} F_i$ e pertanto la topologia indotta su $\langle x \rangle$ è lineare in quanto topologia di relativa della topologia del prodotto che ovviamente è lineare. Ora basta applicare (b). Se $x \in \mathbb{T}^I$ è un elemento che genera un sottogruppo ciclico denso, allora $x \notin M(\mathbb{T}^{\mathbf{c}})$ perchè $\langle x \rangle$ non può essere metrizzabile essendo denso nel gruppo non-metrizzabile $\mathbb{T}^I$.

(d) H contiene il sottogruppo $\Sigma\{\mathbb{T}^A : A \subseteq I, |A| \leq \aleph_0\}$ che risulta G_δ-denso in $\mathbb{T}^I$ per l'Esercizio 12.18. Quindi anche H è G_δ-denso in $\mathbb{T}^I$ e di conseguenza è pseudocompatto per il teorema di Comfort-Ross 12.15.

(e) Per ogni $i \in I$ fissiamo una successione $z_i^{(n)} \to x_i$ di elementi di $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Allora $z^{(n)} = (z_i^{(n)})_{i \in I} \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^I \subseteq H$ e la successione $z^{(n)}$ converge a x in $\mathbb{T}^I$. Poichè $x \notin H$, la successione $z^{(n)}$ non ha punti di accumulazione in H. Pertanto il gruppo H non è numerabilmente compatto per il Teorema 12.5. ♣

12.4 Pseudocompattezza e connessione

Il seguente risultato è la controparte del Teorema 8.29 per gruppi numerabilmente compatti.

Teorema 12.22 *Sia G un gruppo topologico pseudocompatto. Allora $Q(G)$ coincide con l'intersezione di tutti sottogruppi normali aperti di G. Se in più G è numerabilmente compatto, allora $C(G) = Q(G)$.*

Ecco un idea della dimostrazione del teorema. Sia O in insieme chiuso-aperto di G. Allora esiste una funzione contiua $f : G \to \{0, 1\}$ tale che $O = f^{-1}(0)$. Per il punto d) esiste un'estensione della funzione $\hat{f} : \hat{G} \to \mathbb{R}$. Poichè G è denso in $\hat{G}$, anche $f(G)$ sarà denso in $\hat{f}(\hat{G})$. Di conseguenza $\hat{f}(\hat{G}) \subseteq \{0, 1\}$. Quindi $O_1 = \hat{f}^{-1}(0)$ è chiuso-aperto di $\hat{G}$ con $O_1 \cap G = O$. In questo modo possiamo "estendere" i chiusi-aperti di G a tali insiemi in $\hat{G}$. Questo dimostra che $Q(G) \supseteq Q(\hat{G}) \cap G$. Poiché l'inclusione inversa è banalmente sempre vera, si ha $Q(G) = Q(\hat{G}) \cap G$. A questo punto applichiamo Teorema 8.29 per gruppi compatti notando che per ogni sottogruppo aperto N di $\hat{G}$ il sottogruppo $N \cap G$ di G risulta aperto in G.

L'eguaglianza $C(G) = Q(G)$ può fortemente fallire per gruppi pseudocompatti (cf. [D1]).

Ora segue la controparte del Teorema di Vedenissov:

Teorema 12.23 ([D2]) *Ogni gruppo numerabilmente compatto e totalmente sconnesso è zero dimensionale.*

13 Gruppi pro-finiti

Sia G un gruppo topologico la cui topologia τ è lineare. Allora il completamento di G è anche completamento in senso di Weil e si costruisce molto agevolmente tramite limite proiettivo. Infatti, sia $\mathcal{V} = \{N_i\}_{i\in I}$ la base di filtro di intorni di 1 formata da sottogruppi normali aperti. Su I definiamo un ordine parziale ponendo $i \leq j$ se $N_i \supseteq N_j$. Allora $(I, \leq)$ è un insieme parzialmente ordinato filtrante a destra. Per $i, j \in I$ con $i \leq j$ siano $f_i : G \to G/N_i$ e $f_{i,j} : G/N_j \to G/N_i$ gli omomorfismi canonici.

Il limite inverso $\lim_{i\in I} G/N_i$ é definito come il sottoinsieme del prodotto cartesiano $\prod_{i\in I} G/N_i$ che consiste di tutti elementi g del prodotto cartesiano tali che per ogni coppia di indici $i \leq j$ in I si ha $f_{ij}(g(j) = g(i)$. É facile vedere che $\lim_{i\in I} G/N_i$ é un sottogruppo chiuso del prodotto cartesiano $\prod_{i\in I} G/N_i$ munito della topologia di Tichonov, dove tutti i gruppi G/N_i sono discreti. Quindi, essendo un sottogruppo chiuso del prodotto $\prod_{i\in I} G/N_i$ il limite inverso $\lim_{i\in I} G/N_i$ munito della topologia indotta dal prodotto $\prod_{i\in I} G/N_i$, risulta un gruppo completo. In più, l'omomorfismo diagonale $f : G \to \prod_{i\in I} G/N_i$ ha immagine contenuta nel sottogruppo $\lim_{i\in I} G/N_i$, quindi abbiamo un omomorfismo continuo $\iota : G \to \lim_{i\in I} G/N_i$. scrivere ι è leicto, perche si vede facilmente che ι è un'immersione densa. Pertanto $\lim_{i\in I} G/N_i$ coincide con il completamento $\hat{G}$ di G.

Nel caso quando τ è precompatta, cioè tutti sottogruppi N_i sono di indice finito, il completamento $\hat{G}$ è compatto. Gruppo compatti di questo tipo, cioè limite inverso di gruppi finiti, sono detti **gruppi pro-finiti**. Essi appaiono per esempio nella teoria di Galois infinita nel modo seguente. Sia E/K un'estensione di Galois non necessariamente finita e sia $G = Gal(E/K)$ il suo gruppo di Galois. Per ogni estensione intermedia F il sottogruppo fisso $N(F) = \{\sigma \in G : (\forall x \in F)\sigma(x) = x\}$ di F é un sottogruppo normale di G qualora F é un'estensione di Galois di K. In tal caso $Gal(F/K) \cong G/N(F)$, in particolare, F ún'estensione di Galois di finita K se e solo se l'indice $[G : N(F)]$ finito. Sia $\mathcal{F} = \{F_i : i \in I\}$ la famiglia di tutte le estensioni di Galois finite di K contenute in E. Allora la famiglia di sottogruppi normali di indice finito $\mathcal{B} = \{N(F_i) : i \in I\}$ forma una base di intorni di una topologia di Hausdroff precompatta di G, detta *topologia di Krull*. Non è difficile vedere che G munito della topologia di Krull è completo. Infatti, se $\{\sigma_\alpha\}$ è una rete di Cauchy in G, allora si definisce l'applicazione $\sigma : E \to K$ ponendo $\sigma|_{F_i} = \sigma_{\alpha_0}|_{F_i}$, dove α_0 si sceglie così che per $\beta \geq \alpha_0$ e $\beta' \geq \alpha_0$ si ha $\sigma_\beta|_{F_i} = \sigma_{\beta'}|_{F_i}$. L'esistenza di tale α_0 è garantita dal fatto che $\{\sigma_\alpha\}$ è una rete di Cauchy rispetto alla topologia di Krull di G. La scelta di α_0 garantisce la correttezza della definizione di σ. Adesso è facile verificare che σ è un automorfismo di E, quindi $\sigma \in G$. In più, la rete σ_α converge verso σ in G. Questo dimostra

Teorema 13.1 (Krull) *Sia E/K un estensione di Galois e sia $G = Gal(E/K)$ il suo gruppo di Galois munito della topologia di Krull. Allora G è un gruppo compatto.*

I sottogruppi chiusi di G per la topologia di Krull sono precisamente i sottogruppi di G del tipo $N(F)$ per qualche sottocampo F di E contenente K. In altre parole, la topologia di Krull descrive precisamente i sottogruppi di G *chiusi per la corripsondenza di Galois* (cioé un sottogruppo H di G é chiuso nella topologia di Krull se e solo se H é chiuso per la corripsondenza di Galois).

Teorema 13.2 (Krull) *Sia E/K un estensione di Galois e sia $G = Gal(E/K)$ il suo gruppo di Galois. Allora la corrispondenza di Galois manda sottocampi intermedi di E/K in sottogruppi chiusi di G.*

Leptin [L] ha dimostrato che ogni gruppo compatto profinito è gruppo di Galois di qualche estensione di Galois.

14 Gruppi topologici simmetrici: quando manca la simmetria

Sia X un insieme infinito, che sarà considerato come spazio topologico discreto. Il gruppo simmetrico $S(X)$ di tutte la biezioni $f : X \to X$ munito con la topologia $\tau = \tau_X$ della convergenza puntuale (cioè, $f_\alpha \to f$ in $(S(X), \tau)$ se per ogni $x \in X$ esiste α_0 con $f_\alpha(x) = f(x)$ quando $\alpha \geq \alpha_0$) è chiamato il **gruppo topologico simmetrico** di X. È facile vedere che $S(X)$ è un gruppo topologico di Hausdorff. Infatti, τ_X è la topologia indotta su $S(X)$ dall'inclusione $S(X) \to X^X$, dove X^X è munito con la topologia prodotto.

Per $E \subseteq X$ poniamo $S_E(X) = \{f \in S(X) : f(x) = x$ per ogni $x \in E\}$. Chiaramente, se E è finito, allora $S_E(X)$ è an sottogruppo aperto di $S(X)$. Quando $E = \{x\}$, questo sottogruppo sarà denotato con $S_x(X)$. Ovviamente $S_E(X) = \bigcap_{x \in E} S_x$. Scriveremo spesso S, S_E, S_x, τ al posto di $S(X), S_E(X), S_x(X)$, e τ_X , rispettivamente. Notiamo che la famiglia di sottogruppi $\{S_E : E \subseteq X, E \ finite\}$ è un sistema fondamentale di intorni di id per τ. Quindi S è un gruppo topologico totalmente sconnesso. Chiaramente, S è metrizzabile se e solo se X è numerabile.

Lemma 14.1 *Dimostrare che ogni sottogruppo aperto proprio di $S(X)$ ha cuore banale.*

Dimostrazione. Basta notare che per ogni $x \in X$ il cuore di S_x è banale. ♣

14.1 Il teorema di Cayley

Esercizio 14.2 *Sia Y un sottoinsieme di X. Allora l'inclusione $(S(Y), \tau_Y) \hookrightarrow (S(X), \tau_X)$ è una immersione.*

Esercizio 14.3 *Sia $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ una partizione di X. Allora l'inclusione naturale $\prod_{i \in I} S(X_i) \hookrightarrow S(X)$ è una immersione, quando il prodotto porta la topologia prodotto.*

Siamo in gardo di dimostrare il seguente analogo del teorema di Cayley. La condizione "topologia lineare" è lievemente più forte di quella necessaria - topologia avente come base di intorni di 1 sottogruppi aperti (una proprietà che manisfestamente e presente nei gruppi simmetrici e quindi anche nei loro sottogruppi).

Teorema 14.4 *Sia G un gruppo topologico con topologia lineare. Allora G è topologicamente isomorfo ad un sottogruppo di qualche gruppo simmetrico $S(X)$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{V}$ una base degli intorni di 1 di G formata da sottogruppi normali aperti. Allora G è topologicamente isomorfo ad un sottogruppo del prodotto $\prod_{N \in \mathcal{V}} G/N$, dove ciascuno dei gruppi G/N è discreto. Adesso il gruppo discreto G/N è topologicamente isomorfo ad un sottogruppo di $S(G/N)$ (basta prendere qualunque sottogruppo di $S(G/N)$ che agisce senza punti fissi, per esempio le traslazioni). Adesso si applica l'esercizio precedente. ♣

Corollario 14.5 *Ogni gruppo compatto totalmente sconnesso è topologicamente isomorfo ad un sottogruppo di qualche gruppo simmetrico.*

Dimostrazione. Si applichi il teorema precedente e 8.29. ♣

Teorema 14.6 *Ogni gruppo localmente compatto che possiede un sottogruppo normale aperto compatto e totalmente sconnesso è topologicamente isomorfo ad un sottogruppo di qualche gruppo simmetrico.*

Dimostrazione. Sia G un gruppo localmente compatto e sia N un sottogruppo normale aperto di N che sia compatto e totalmente sconnesso. Allora per il 14.5 esiste una immersione $i : N \hookrightarrow S(X)$ per qualche insieme infinito X. Per il quoziente (discreto) G/N esiste una immersione $j : G/N \hookrightarrow S(Y)$ che composta con l'omomorfismo canonico $G \to G/N$ ci dà un omomorfismo $k : G \to S(Y)$. Allora l'omomorfismo diagonale $\langle j, k\rangle : G \to S(X) \times S(Y) \subseteq S(X \cup Y)$ è l'immersione cercata. ♣

Corollario 14.7 *Ogni gruppo abeliano localmente compatto e totalmente sconnesso è topologicamente isomorfo ad un sottogruppo di qualche gruppo simmetrico.*

Dimostrazione. Si applichi 14.6 ♣

Nel seguito per $E \subseteq X$ e $M \subseteq S(X)$ scriveremo $M(E)$ per l'insieme $\bigcup_{f \in M} f[E]$.

Proposizione 14.8 *Sia $U = S_E$ un intorno di 1 in $S(X)$, con $E \subseteq X$ finito. Allora un sottoinsieme M di $S(X)$ è U-sotile se e sole se $M(E)$ è finito.*

Dimostrazione. Consideriamo prima il caso $M = \{x\}$ per qualche $x \in X$. Poichè $\bigcap_{f\in M} fUf^{-1} = \bigcap_{f\in M} S_{f(x)} = S_{M(x)}$, questo insieme è intorno di 1 in $S(X)$ se e solo se $M(x)$ è finito. Ora, nel caso generale, se $M(E)$ è infinito, esiste $x \in E$ tale che $M(x)$ è infinito. Quindi M non è S_x-sotile per il caso già considerato. Poichè $U = S_E \subseteq S_x$ concludiamo (con 3.16) che M non è U-sotile. Se invece $M(E)$ è finito allora anche $M(x)$ è finito per ogni $x \in E$, e quindi per il caso già considerato M S_x-sotile per ogni $x \in E$. Ora applicando di nuovo 3.16 concludiamo che M è anche $U = \bigcap_{x\in E} S_x$-sotile. ♣

Definizione 14.9 Un sottoinsieme $M \subseteq S(X)$ si dice **localmente finito** se per ogni $x \in X$ l'insieme $M(x) = \{f(x) : f \in M\}$ è finito.

Teorema 14.10 *Un sottoinsieme M di $S(X)$ è sotile se e sole se M è localmente finito.*

14.2 Semplicità topologica dei gruppi simmetrici

Proposizione 14.11 *(a) Per ogni $x \in X$ il sotogruppo S_x di $S(X)$ è massimale.*
(b) If H is a subgroup of S and E is a finite subset of X such that $H \supseteq S_E$ and $H \cdot E \not\subseteq E$, then there exists a proper subset E' of E with $H \supseteq S_{E'}$.

Per $f \in S$ il *supporto* di f si definisce con $\mathit{supp}\, f = \{x \in X : f(x) \neq x\}$. Sia $F(X)$ il sottogruppo di $S(X)$ formato da $f \in S(X)$ con supporto finito. Ovviamente $F(X)$ è generato da transposizioni. Sia $A(X)$ il *sottogruppo alterno* di $S(X)$, cioè, il sottogruppo di $F(X)$ formato dai prodotti di numero pari di trasposizioni. Allora $A(X)$ è un sottogruppo normale di $F(X)$ e $|F(X)/A(X)| = 2$.

Esercizio 14.12 *$A(X)$ (e quindi anche $F(X)$) è denso in $S(X)$.*

Ora possiamo dimostrare che i gruppi simmetrici sono topologicamente semplici.

Teorema 14.13 *$F(X)$ (e quindi anche $S(X)$) is topologicalmente semplice.*

Dimostrazione. Dalla semplicità dei gruppi A_n, con $n > 4$, si deduce facilmente che anche $A(X)$ è un gruppo semplice. Sia adesso $N \neq \{1\}$ un sottogruppo normale di $F(X)$. Allora $N_1 = N \cap A(X)$ è un sottogruppo normale di $A(X)$, quindi coincide con $A(X)$. Questo dimostra che N contiene $A(X)$ ed è quindi denso in $F(X)$. ♣

14.3 Gruppi minimali

Qui studieremo i gruppi per i quali vale sempre il teorema dell'omomorfismo 5.2:

Definizione 14.14 Un gruppo topologico di Hausdorff G è:

- **minimale** se ogni isomomorfismo continuo $\pi : G \to H$ di G su un gruppo topologico H è aperto,
- **q-minimale** se ogni omomorfismo continuo $\pi : G \to H$ of G su un gruppo topologico H è aperto.

Se (G, τ) è un gruppo topologico minimale (q-minimale), chiameremo la topologia τ minimale (risp., q-minimale). Ovviamente, il teorema dell'omomorfismo vale per ogni grouppo q-minimale e viceversa.

Chiaramente ogni gruppo q-minimale è minimale. Più precisamente abbiamo:

Esercizio 14.15 *Sia G un gruppo topologico di Hausdorff. Allora G è q-minimale se e solo se G/N è minimale per ogni sottogruppo chiuso normale N di G.*

Esercizio 14.16 *Ogni gruppo compatto è q-minimale.*

Esempio 14.17
- Per ogni primo p la topologia p-adica τ_p di $\mathbb{Z}$ è q-minimale,
- Il sottogruppo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ di $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ è q-minimale,
- il gruppo $(\mathbb{Z}, \tau_p) \times (\mathbb{Z}, \tau_p)$ non è minimale,
- $\mathbb{R}$ non è minimale.

Il seguente teorema é dovuto a Gaughan.

Teorema 14.18 *I gruppi simmetrici sono minimali (e quindi, q-minimali).*

Dimostrazione. Sia X un insieme infinito. Dalle proprietà dimostrate negli esercizi e lemmi successivi (cf. [DPS, Ch. 7]), segue che la topologia τ di $S(X)$ è infatti contenuta in ogni altra topologia gruppale di Hausdorff su $S(X)$. In particolare, essa è minimale. ♣

Esercizio 14.19 *Siano $x \neq y$ elementi di X. Allora il sottogruppo $\tilde{S}_{x,y} = \{f \in S : f(\{x,y\}) \subseteq \{x,y\}\}$ di $S(X)$ è massimale.*

Esercizio 14.20 *Sia $B \subseteq S(X)$, con $id \in B, x \in X$ e $|X \backslash Bx| = |X|$. Allora esiste $f \in S(X)$ con $fBf^{-1} \cap B \subseteq S_x$.*

Un sottoinsieme B of $S(X)$ è detto 2-*transitivo* se per ogni $x \neq y$ e $z \neq t$ in X esiste $f \in B$ con $f(x) = z$ e $f(y) = t$.

Esercizio 14.21 *Sia T una topologia gruppale di Hausdorff su $S(X)$ e siano $x \neq y$ elementi di X. Allora $S_{x,y}$ è T-denso in $S(X)$ se e solo se ogni T-intorno di id è 2-transitivo.*

Lemma 14.22 *Sia T una topologia gruppale di Hausdorff su $S(X)$ tale che S_x è T-chiuso in S per ogni $x \in X$. Allora S_x è T-aperto per ogni $x \in X$.*

Lemma 14.23 *Sia T una topologia gruppale di Hausdorff su $S(X)$ e sia $x \in X$ tale che S_x è T-denso in $S(X)$. Allora $S_{x,y}$ è T-denso in S per ogni $y \in X$.*

14.4 Esercizi

(1) Ogni gruppo abeliano topologico ammette un isomorfismo continuo in un prodotto di gruppi abeliani metrizzabili.

[*Suggerimento.* Per $x \in G$, $x \neq 0$ scegliamo an intorno aperto U di 0 con $x \in U$. Allora si trova una successione $\{U_n\}$ di intorni aperti e simmetrici con $U_0 \subseteq U$ e $U_n + U_n \subseteq U_{n-1}$. Allora $H = \bigcap U_n$ è un sottogruppo chiuso di G .Sia τ' la topologia sul gruppo quoziente G/H che ha come base $\{f(U_n)\}$, dove $f : F \to G/H$ è l'omomorfismo canonico. Dimostrare che $(G/H, \tau')$ è metrizzabile.]

(2) Sia τ un numero cardinale infinito. Dimostrare che esiste un gruppo topologico G tale che G non ammette alcun isomorfismo continuo in un prodotto di gruppi di Hausdorff di peso $\leq \tau$. [*Suggerimento.* Sia X un insieme di cardinalità $> \tau$, e $G = S(X)$. Allora essendo $S(X)$ topologicamento semplice ammette soltanto omomorfismi iniettivi $S(X) \to H$ che sono infatti immersioni perchè $S(X)$ è minimale (cf. 14.18). Questo implica $w(H) \geq w(S(X)) > \tau$.]

(3) Se G è un gruppo precompatto, allora $w(G) = \chi(G)$.

(4) Siano p e q numeri primi distinti. Dimostrare che il sottogruppo diagonale $\Delta = \{(n,n) : n \in \mathbb{Z}\}$ di $(\mathbb{Z}, \tau_p) \times (\mathbb{Z}, \tau_q)$ è denso, dove τ_p e τ_q indicano la topologia p-adica e la topologia q-adica, rispettivamente di $\mathbb{Z}$.

(5) Sia $f : G \to H$ un omomorfismo di gruppi topologici e sia $\Gamma_f := \{(x, f(x)) : x \in G\} \subseteq G \times H$ il grafico di f. Dimostrare che:

- se H è di Hausdorff e f è continuo, allora Γ_f è chiuso in $G \times H$;
- se $\ker f$ è denso in G e $\operatorname{Im} f$ è denso in H allora Γ_f è denso in $G \times H$.

(6) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un omomorfismo tale che $f|_{\mathbb{Q}} = id_{\mathbb{Q}}$ e $f|_{\mathbb{Q}\sqrt{2}} = 0$. Allora il grafico Γ_f è denso in $\mathbb{R}^2$.

(7) Sia p un numero primo e sia Ω_p la chiusura algebrica del campo $\mathfrak{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Descrivere il gruppo di Galois dell'estensione $\Omega_p/\mathfrak{F}_p$ e la sua topologia di Krull.

References

[BS] H. Bass e T. Soundararajan, *A property di profinite groups and the converse di the classical Galois theory*, J. Indian Math. Soc. **36** (1972) 1-7.

[CR] W.W. Comfort and K. Ross, Pseudocompactness and uniform continuity in topological groups, Pacific J. Math. **16** (1966), 483–496.

[D1] D. Dikranjan, *Disconnectedness and dimension in pseudocompact groups*, Comp. Rend. Acad. Sci. Paris, **316**, Série I (1993) 309-314.

[D2] D. Dikranjan, *Zero-dimensionality of some pseudocompact groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **120**, n. 4 (1994) 1299-1308.

[DAT] D. Dikranjan, *Appunti di Topologia 1*, disponibili su `http//www.dimi.uniud.it/~dikranja/`

[DPS] D. Dikranjan, Iv. Prodanov e L. Stoyanov *Topological groups: Characters, Dualities e Minimal Group Topologies,* Pure e Applied Mathematics, Vol. **130**, Marcel Dekker Inc., New York-Basel 1989, pp. 287+x.

[DT] D. Dikranjan and W. Tholen *Categorical Structure of Closure Operators with Applications to Topology, Algebra and Discrete Mathematics*, Mathematics and its Applications, vol. 346, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London 1995, pp. 358+xviii.

[Du] J. Dugundji, "Topology," Allyn And Bacon, Inc., Boston 1966

[E] Ryszard Engelking, "General Topology," Helderman Verlag, Berlin. 1989

[HR] E. Hewitt and K. Ross, *Abstract Harmonic Analysis I.* Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1963.

[I] M. Ikeda, *Completeness di the absolute Galois group di the algebraic closure di the rational number field*, J. Reine Angew. Math. **2981** (1977) 1-22.

[Ka] Kaplansky, *Lie algebras and locally compact groups*, The University of Chicago Press, Chicago, Ill.-London 1971.

[K] W. Krull, *Galoissche Theorie der unendlichen algebraischen Erweiterungen*, Math. Annalen **100** (1928) 687-698.

[L] H. Leptin, *Ein Darstellungssatz für kompakte total unzusammenhängende Gruppen*, Arch. Math. **6** (1955) 371-373.

[O] A. Orsatti, *Introduzione ai gruppi abeliani astratti e topologici*, Quaderni dell'Unione Mat.Italiana, Pitagora Ed., Bologna, 1979.