La crescita degli endomorfismi gruppali

Anna Giordano Bruno
(da lavori con Dikran Dikranjan, Pablo Spiga, Flavio Salizzoni)

XXI Congresso U.M.I.
Pavia, 4 settembre 2019

Siano G un gruppo finitamente generato ed
S un insieme (finito) di generatori di G, con $1 \notin S$ e $S = S^{-1}$.

Per ogni $g \in G \setminus \{1\}$, sia
$\ell_S(g)$ la lunghezza della più corta parola che rappresenta g in S;
inoltre $\ell_S(1) = 0$.

Per $n \geq 0$, sia $B_S(n) = \{g \in G : \ell_S(g) \leq n\}$.

La <u>funzione di crescita di G rispetto ad S</u> è

$$\gamma_S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \;\; n \mapsto |B_S(n)|.$$

Il <u>tasso di crescita di G rispetto ad S</u> è

$$\lambda_S = \lim_{n\to\infty} \frac{\log \gamma_S(n)}{n}.$$

Per due funzioni $\gamma, \gamma' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

- $\gamma \preceq \gamma'$ se esistono $n_0, C > 0$ tali che $\gamma(n) \leq \gamma'(Cn)$, $\forall n \geq n_0$.
- $\gamma \sim \gamma'$ se $\gamma \preceq \gamma'$ e $\gamma' \preceq \gamma$.

Per ogni $d, d' \in \mathbb{N}$, $n^d \sim n^{d'}$ se e solo se $d = d'$.
Per ogni $a, b \in \mathbb{R}_{>1}$, $a^n \sim b^n$.

Definizione

Una funzione $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è:

(a) *polinomiale se $\gamma(n) \preceq n^d$ per qualche $d \in \mathbb{N}_+$;*

(b) *esponenziale se $\gamma(n) \sim e^n$;*

(c) *intermedia se $\gamma(n) \succ n^d$ per ogni $d \in \mathbb{N}_+$ e $\gamma(n) \prec e^n$.*

Siano G un gruppo finitamente generato ed
S un insieme (finito) di generatori di G, con $1 \notin S$ e $S = S^{-1}$,

$$\gamma_S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \; n \mapsto |B_S(n)|,$$

$$\lambda_S = \lim_{n \to \infty} \frac{\log \gamma_S(n)}{n}.$$

Definizione

Il gruppo finitamente generato $G = \langle S \rangle$ ha:

- *crescita polinomiale se γ_S è polinomiale;*
- *crescita esponenziale se γ_S è esponenziale;*
- *crescita intermedia se γ_S è intermedia.*

La definizione non dipende dalla scelta di S:
se $G = \langle S' \rangle$ allora $\gamma_S \sim \gamma_{S'}$.

Proprietà:

- γ_S si stabilizza se e solo se G è finito;
- $\gamma_S \succeq n$ se G è infinito;
- γ_S è al più esponenziale;
- γ_S è esponenziale se e solo se $\lambda_S > 0$;
- se γ_S è polinomiale allora esiste $d \in \mathbb{N}$ tale che $\gamma_S \sim n^d$;
- se γ_S non è polinomiale e non è esponenziale allora è intermedia.

Esempi:

- $\mathbb{Z}$ ha crescita polinomiale
  (con $S = \{-1, 1\}$ si ha $\gamma_S(n) = 2n + 1$);
- $\mathbb{F}_2 = \langle a, b \rangle$ ha crescita esponenziale
  (con $S = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ si ha $\gamma_S(n) = 2 \cdot 3^n - 1$).

Problema (J. Milnor)

Sia $G = \langle S \rangle$ un gruppo finitamente generato.

- *γ_S è necessariamente o polinomiale oppure esponenziale?*
- *Quali gruppi hanno crescita polinomiale?*

Il famoso gruppo di R. Grigorchuk ha crescita intermedia.

Teorema (M. Gromov)

Un gruppo finitamente generato ha crescita polinomiale se e solo se è virtualmente nilpotente.

Teorema (J. Milnor - J. Wolf)

Un gruppo finitamente generato risolubile non può avere crescita intermedia.

Siano G un gruppo, $\phi : G \to G$ un endomorfismo e $\mathcal{F}(G) = \{F \subseteq G : 1 \in F \neq \emptyset \text{ finito}\}$.

Per $F \in \mathcal{F}(G)$, siano $T_0(\phi, F) = \{1\}$ e per $n > 0$

$$T_n(\phi, F) = F \cdot \phi(F) \cdot \ \dots \ \cdot \phi^{n-1}(F).$$

L'<u>entropia algebrica di ϕ rispetto ad F</u> è

$$H(\phi, F) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log |T_n(\phi, F)|}{n};$$

l'<u>entropia algebrica di ϕ</u> è

$$h(\phi) = \sup_{F \in \mathcal{F}(G)} H(\phi, F).$$

[R. L. Adler, A. G. Konheim, M. H. McAndrew - M. Weiss - J. Peters - D. Dikranjan, AGB]

L'entropia algebrica generalizza il tasso di crescita classico:

Sia $G = \langle S \rangle$ un gruppo finitamente generato ($1 \notin S = S^{-1}$).
Per $\phi = id_G$ e $F = S \cup \{1\}$, $T_0(id_G, F) = \{1\}$ e per $n > 0$

$$T_n(id_G, F) = \underbrace{F \cdot \ldots \cdot F}_{n} = B_S(n);$$

quindi

$$|T_n(id_G, F)| = |B_S(n)| = \gamma_S(n),$$

e dunque

$$H(id_G, F) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log |T_n(id_G, F)|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log \gamma_S(n)}{n} = \lambda_S.$$

Esempio:

- Se G è un gruppo abeliano, allora $h(id_G) = 0$.
- Se G è un gruppo finitamente generato, allora G ha crescita esponenziale se e solo se $h(id_G) = \infty$.

Esempi fondamentali:

- Sia $\beta : \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $(x_0, x_1, \ldots) \mapsto (0, x_0, \ldots)$; allora $h(\beta) = \log p$.
- Siano $k > 0$ e $\mu_k : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto kx$; allora $h(\mu_k) = \log k$.
- Per endomorfismi di $\mathbb{Q}^n$, la Formula di Yuzvinski mostra che l'entropia algebrica coincide con la misura di Mahler del polinomio caratteristico.

Siano G un gruppo, $\phi : G \to G$ un endomorfismo ed $F \in \mathcal{F}(G)$.
La funzione di crescita di ϕ rispetto ad F è

$$\gamma_{\phi,F} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \;\; n \mapsto |T_n(\phi, F)|.$$

Se $G = \langle S \rangle$ è un gruppo finitamente generato ($1 \notin S = S^{-1}$), allora per $F = S \cup \{1\}$ si ha

$$\gamma_S = \gamma_{id_G,F}.$$

Proprietà:

- $\gamma_{\phi,F}$ è al più esponenziale;
- $\gamma_{\phi,F}$ è esponenziale se e solo se $H(\phi, F) > 0$.

Definizione

Un endomorfismo $\phi : G \to G$ di un gruppo G ha:

(a) *crescita polinomiale se $\gamma_{\phi,F}$ è polinomiale per ogni $F \in \mathcal{F}(G)$;*
(b) *crescita esponenziale se $\exists\ F \in \mathcal{F}(G)$ tale che $\gamma_{\phi,F}$ è esp.;*
(c) *crescita intermedia altrimenti.*

Questa definizione estende quella classica, con $G = \langle S \rangle$ finitamente generato ($1 \notin S = S^{-1}$), $F = S \cup \{1\}$ e $\phi = id_G$.

Proprietà:

- ϕ ha crescita esponenziale se e solo se $h(\phi) > 0$.

Definendo che:
un gruppo G ha crescita polinomiale (risp., esp., intermedia) se id_G ha crescita polinomiale (risp., esp., intermedia),

si deducono dai teoremi classici corrispettivi i seguenti risultati.

Teorema (tipo Gromov)

Un gruppo ha crescita polinomiale se e solo se è localmente virtualmente nilpotente.

Teorema (tipo Milnor - Wolf)

Un gruppo G localmente virtualmente risolubile non può avere crescita intermedia.

Problema

Per quali gruppi G ogni endomorfismo $\phi : G \to G$ ha crescita o polinomiale oppure esponenziale?

Eq., per quali gruppi G, $h(\phi) = 0$ implica ϕ di crescita polinomiale?

Teorema (D. Dikranjan, AGB)

Se G è un gruppo abeliano e $\phi : G \to G$ un endomorfismo, allora ϕ non ha crescita intermedia.

Teorema (AGB, P. Spiga)

Se G è un gruppo localmente finito e $\phi : G \to G$ un endomorfismo, allora ϕ non ha crescita intermedia.

Teorema (AGB, P. Spiga)

Se G è un gruppo localmente virtualmente risolubile e $\phi : G \to G$ un endomorfismo, allora ϕ non ha crescita intermedia.

Siano G un gruppo abeliano, $\phi : G \to G$ un endomorfismo,
H un sottogruppo di G normale ϕ-invariante,
$\phi \restriction_H : H \to H$ la restrizione di ϕ e
$\bar{\phi}_{G/H} : G/H \to G/H$ l'endomorfismo indotto da ϕ.

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, hook] \arrow[d, "\phi\restriction_H"'] & G \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\phi"] & G/H \arrow[d, "\bar{\phi}"] \\
H \arrow[r, hook] & G \arrow[r, two heads] & G/H
\end{tikzcd}$$

Vale il Teorema di Addizione se

$$h(\phi) = h(\phi \restriction_H) + h(\bar{\phi}_{G/H}).$$

Problema

Per quali terne (G, ϕ, H) vale il Teorema di Addizione?

Teorema (Dikranjan, AGB)

Se G è un gruppo abeliano, allora il Teorema di Addizione vale per ogni (G, ϕ, H).

In generale il Teorema di Addizione non vale:

Esempio (AGB, Spiga)

Sia $G = \mathbb{Z}^{(\mathbb{Z})} \rtimes \mathbb{Z}$ il Lamplighter group. Allora:

- *$h(id_G) = \infty$ perché G ha crescita esponenziale;*
- *$h(id_{\mathbb{Z}^{(\mathbb{Z})}}) = 0$ e $h(id_{\mathbb{Z}}) = 0$ poiché $\mathbb{Z}^{(\mathbb{Z})}$ e $\mathbb{Z} = G/(\mathbb{Z}^{(\mathbb{Z})})$ sono abeliani.*

Congettura

Se G è un gruppo nilpotente, allora il Teorema di Addizione vale per ogni (G, ϕ, H).

Congettura

Se G è un gruppo localmente finito, allora il Teorema di Addizione vale per ogni (G, ϕ, H).

Teorema (AGB, F. Salizzoni)

Se G è un gruppo localmente finito che è quasihamiltoniano o FC-torsion, allora il Teorema di Addizione vale per ogni (G, ϕ, H).

FINE

Grazie per l'attenzione